

# भूमिका

.....

अस्तीह गणित-गोलादिविविधविषयपूरितः श्रुतिपथप्रदर्शी ज्यौ-  
तिषसिद्धान्तो भारतेऽन्यत्र च सुप्रसिद्धः सर्वेषां सिद्धविधानां पुरतः ।  
सोऽयं क्रमशः सुखबोधाय गणितलाघवादिमाश्रित्य लब्धात्माभ्यु-  
दय इदानीं वस्तुतोऽन्यान्यवेदाङ्गेषु शिथिलतां गतेष्वपि स्वचक्षुश्वा-  
रितार्थं विशेषतो भजत एव ।

यतः स्थविरतां लभमानस्यापि तस्यावलोकनसामर्थ्यवर्धकं  
यद्यर्थं नेत्रावरणमिवाभिनवाव्यक्तगणितज्यामितित्रिकोणमित्यादि  
विषयजातम् । येन चिरसाध्यमपि तज्ज्ञानं त्वचिरसिद्धमिवेत्यवगम्य  
त्रयाणां कोणानां मितिरित्यत्रोपचारात् त्रयाणां कोणानां मितेर्ज्ञापिका  
कृतिरिति सरला प्रथमा प्रथमतो ज्यौतिषशूद्धरणधुरीणैः सर्वज्यौ-  
तिषिकशिरोमणिभिः प्रियसिद्धान्तशिरोमणिभिर्महामहोपाध्यायैः श्री-  
मद्भिः पण्डित बापूदेवशास्त्रिभिरेव संकलय्य काश्यामेव ' मेडिकल-  
हॉल '—यन्त्रालयतः प्राकाशि ।

तत्समय एव विद्यमानैः सुप्रसिद्धसिद्धविधैर्ज्यौतिषसिद्धान्ततत्त्व-  
विवेकमर्मज्ञैर्मैथिलभूसुरैः श्रीमद्भिः पण्डितनीलाम्बरशर्मभिर्ज्ञोपाध्यायै-  
र्विरचितः सरलत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितचापीयत्रिकोणमित्यादि-  
नानाज्यौतिषसिद्धान्तीयविषयवासना-विकाशो ' गोलप्रकाशो ' नाम  
ग्रन्थस्तैरेकोक्त्याङ्गभिः स्वसंशोधकत्वेनादृतस्तस्मिन्नेव यन्त्रालये  
प्रकाशितश्च ।

समयानुसारं सर्वत्र संस्कृतपरीक्षानियमे प्रस्तुते संप्रति विशेष-  
पतो रेखागणितत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितादिग्रन्थाः पिपठिषुभिः

( २ )

सावधानतया ज्ञातुमभिलष्यन्ते तत्र धीजमेवाव्यक्तगणितं नव्यमव्यक्त-  
मेव बहुधाऽनः प्रथमं तदव्यक्तमेव प्रकाशयामिति मन्यमानोऽहमादौ  
सरलत्रिकोणमिति पुस्तकालामात् श्रेष्ठिना भा. हरिदासगुप्तात्मजेन  
श्रीहरिकृष्णदासगुप्तेन स्वीकृततन्मुद्रणव्ययादिना शोधयितुं प्रवर्तितो-  
ऽमूलम् ।

यद्यपि सूर्यसिद्धान्तार्यमटसिद्धान्तपञ्चसिद्धान्तिकाब्रह्मस्फुटसि-  
द्धान्तादिष्वपि जीवाकोटिज्योत्कमज्यातो घनर्णतत्तन्नितसंस्कारा-  
घवठोकनेन रेखागणितज्ञानमिवास्यापि ज्ञानं प्राचीनसमयादेवा-  
स्त्येवाऽयोऽपि पाश्चात्यगणितवित्संकठितां नानामिनवगणितवैचित्र्य-  
विप्रितां वृद्धीं तामेव सर्वां संकलय्य प्रकाशयितुमुत्कण्ठितोऽपि  
गुरुजनकृतिसमुद्धरणव्रतलिप्सयाऽन्तरायित एतामेव सरलत्रिको-  
णमिति संशोधयितुमारभेयम् ।

अत्र चत्वारोऽध्यायाः प्रक्रमपदवाच्याः सिद्धान्तनियथाश्च सन्ति  
यत्र स्थानविशेषे ब्रह्मगुप्त-भास्कराचार्यादीनां ज्याकोटिज्यावृत्तान्त-  
स्त्रिभुजचतुर्भुजफलवृत्तफलादिसाधननियामकाः श्लोका उपपद्यन्ते  
तत्र २ ते २ श्लोकाश्च प्रतिपदोक्ता वर्तन्ते मध्येऽध्यायासार्थं कतिपयाः  
प्रश्ना विशेषतश्चतुर्थाध्याये प्रघातमापकसंकेतेन कोणज्यादिमानसाधनं  
वेधतः स्थानान्तरितवृक्षपर्वतोच्छ्रितिनदीविस्तारादिज्ञापका ग्रन्थान्ते  
विंशतिः प्रश्नाश्च सुरक्षिताः ।

अत्र बहुत्र स्थलेषु यत्र २ जीवादिस्वरूपमात्रप्रदर्शनादेव प्रक-  
माह्नास्तत्र २ मया वाक्यतो वृद्धदक्षरैर्ज्ञापिताः । यत्र चास्मद्गुरुव-  
राणां ज्यौतिषभास्कराणां गणिताद्वितीयानां महामहोपाध्यायपण्डित-  
श्रीमत्सुधाकरद्विवेदिनां द्वित्रं पद्यमुपपद्यते तत्र २ टिप्पण्यां तदप्या-  
दृतं तथाऽध्यायासार्थं ग्रन्थमध्यस्थप्रश्नानामुत्तराणि च सुलभं दर्शितानि ।  
चतुर्थाध्यायस्य प्रघातमापकगणितावबोधकं नवीनगणितमप्यावश्यक-

त्वेन तत्र चतुर्थाध्यायात् प्रागेव निःक्षिप्तं तथा ग्रन्थान्ते रक्षितानां  
 विंशतेः प्रश्नानां सोपपत्तिकं कलासारण्यनुसारगणितप्रदर्शन—(लाग्रे-  
 थ्म = Logarithm ) लघुरिक्त्यगणितपूर्वकमुत्तरं चान्ते निवेश्य  
 सर्वान्ते कतिचन प्रश्नाश्चान्येऽभ्यासार्थं धृताः सन्ति । एवं यथाबुद्धि-  
 विभवं संशोध्यापि “ भ्रान्तिर्मनुष्यधर्मः ”—इति नराभिमानाज्ञानाद-  
 क्षिचापल्यदोषतोऽवश्यं त्रुटिभागद्वयमीक्ष्यं शुद्धान्तःकरणान् गणित-  
 सिद्धान्तविदुषो मुहुः प्रार्थये ।

श्रीमुरलीधरशा मैथिलः ।



पुस्तकप्राप्तिस्थानम्

{ श्रीहरिकृष्णदास,  
 मालिक, “गुप्तबुद्धीपो”  
 “कचोरीगली” बनारस सिटी ।

# शुद्धिपत्रम् ।



अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे पंक्तिः
मिष्टस्थाने	मिष्टस्थाने	५ १४
वमा + कव	कमा + कव	११ ४
$\left(\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	$\left(\frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	१२ १३
—कोज्याक·ज्याक	—कोज्याअ·ज्याक	१८ १
कोज्या(अ-क)	कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ-क)	२१ १२
२कोज्या(अ+क)·ज्याअ- (अ-क)	२कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क)·ज्या $\frac{१}{२}$ - (अ-क)	२१ १३
त्रि <sup>२</sup> +	त्रि <sup>२</sup> +	२५ १
$\sqrt{\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}}$	$\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}$	३४ ३
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	३५ ५
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	३५ ६
प्रक्रमस्य	प्रक्रमस्य	३६ २०
$\frac{२स(स-अ)}{२कग}$	$\frac{२स(स-अ)}{कग}$	४३ ८
$\frac{२(स-क)(स-ग)}{२कग}$	$\frac{२(स-क)(स-ग)}{कग}$	४३ १०
व्यासाधयो-	व्यासाधयो-	४८ १६
अ <sup>२</sup> + घ <sup>२</sup>	अ <sup>२</sup> + घ <sup>२</sup>	४६ १२
कोज्या <sup>२</sup> इगा	कग·ज्या <sup>२</sup> इगा	५३ १

अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे	पंक्ति
२ज्या२आ	ज्या२आ	५३	१७
संख्याकर्ज-	संख्याकर्ज-	५५	११
ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ , कोज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$	ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न} \times$ कोज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$	५८	११
ज्या <sup>२</sup> अ + ज्या <sup>२</sup> अ	कोज्या <sup>२</sup> अ + ज्या <sup>२</sup> अ	७५	११
ज्या(६०° + अ)	ज्या(६०° + अ)	८५	२३
ईदं धनमूलहापकम्	ईदं धनमूलहापकम्	८८	१६
लघु १३३	लघु १३ $\frac{१}{२}$	९०	४
लघु १ = १, ०'१, ००'१	लघु १ = ०, ००'१, ०००'१	९१	१०
१० + प्रघाटअ	१० + प्रघाटअ	९७	१७
कामन	कामान	१०२	६
- प्रघाटज्याका	- प्रघाटकोज्याका	११६	१८
अघ <sup>२</sup> - अघ <sup>२</sup>	अघ <sup>२</sup> - अघ <sup>२</sup>	११८	६
मसंभावं	मसंभवं	१२०	१५



अथ

# त्रिकोणमितिः ।

तत्र

प्रथमोऽध्यायः ।

—१०—

नत्वेभास्यं वक्ष्ये त्रिकोणमितिनामकं गणिततन्त्रम् ।

यदवगमाद्भूखस्थं वस्तु स्याद्गणयितुं सुशकम् ॥ १ ॥

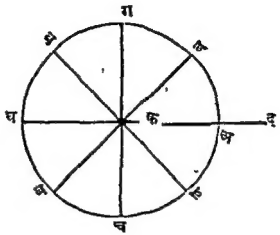
परिभाषाः ।

१ प्रक्रमः । त्रिकोणस्य त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति पदवयवा \* भवन्ति । तेषामवयवानामवगमकं तन्त्रं त्रिकोणमितिसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणगुणानां सम्यग्ज्ञाने कोणानां भुजैः साकं यः सम्बन्धस्तस्य भुजानां च सम्यग्ज्ञानादत्र कोणगुणा मुख्यत्वेन वर्ण्यन्ते ।

२ । संयुक्तैकमान्तयो रेखयोरन्योन्यप्रावण्यं क्षेत्रमितौ कोणशब्देन व्यवह्रियते किन्त्विह त्रिकोणमितौ संयुक्तैकमान्तयो रेखयोः संयुक्ताग्रे मियो दृढं बद्ध्वा पूर्वमेकां रेखामपरस्यां निधाय तस्यां निहितरेखायामेकस्मिन्नेव भूतले भ्रमितायां तद्रेखया यावान् प्रदेशोऽतिक्रम्यते तावान् कोणसंज्ञः स्याद् ।

ॐ त्रिभुजस्य फलमपीति सप्तावयवैर्भवितव्यम् ।

यथाऽत्र किल कद  
आधाररेखा । क रेखयोः  
संयोगविन्दुः । तथा  
कोणोत्पत्त्यै पूर्व या  
रेखा कद-रेखायां नि-  
धाय एकस्मिन्नेव भूतले  
भ्रान्यते सा कव । तदा-  
ऽस्या रेखाया भ्रमणे-  
न संजात अकव-  
कोणस्रैकोणमितिक  
वच्यते । क्षेत्रमिति-



सम्बन्धी कोणः समकोणद्वयादधिको न भवति परन्तु त्रिकोणमिति-  
सम्बन्धी ततोऽप्यधिको यथेष्टं महान् जायते । अथ यदि क-केन्द्रमभितः  
कख इष्टव्यासार्धेनैकम् अगच वृत्तं क्रियते तदा अकव-कोणसंमुख-  
चापः क्षेत्रमितावर्षपरिधेरधिको न भवति किन्त्वत्र स चापः परि-  
धेरप्यधिको यथेष्टं भवितुमर्हति ।

३ । क-विन्दौ यथापथा अकव-कोणो वर्धते तथातथा  
तत्संमुखचापो वर्धते । अतः प्रतिसमकोणसंमुखचापः परिधि-  
चतुर्थांशो भवति । अयमेव पदसंज्ञः ।

यथोर्ध्वक्षेत्रे अघ-व्यासे क-केन्द्रे गच-लम्बकरणेन संजातानां  
चतुर्णां समकोणानां संमुराः क्रमेण अग, गघ, घच, चअ चापाः  
पदाख्याः स्युः । अत एवैकस्मिन् पदे समकोणे च समाना एव नव-  
तितुल्या भागा अंशसंज्ञाः कल्प्यन्ते । तथोमयत्रैकैकस्मिन्नंशे षष्टिस्तु-  
ल्यभागाः कलासंज्ञाः कल्प्यन्ते । एकैकस्यां कलायां च षष्टिरेव तुल्य-  
भागा विकलाख्याः कल्प्यन्ते । अथैतेषामंशकलाविकलासंज्ञकभागानां  
मानसंख्याद्योतनाय तत्तत्संख्याद्वयोपरि दक्षिणभागे क्रमेण ' , ' , ' ,  
एतानि चिह्नानि लिख्यन्ते । यथा पञ्चविंशतिरंशाश्चत्वारिंशत् कलाः  
पदपञ्चाशद्विकलाश्चैतेषां द्योतनाय २५, ४०, ५६ एवं लिख्यन्ते ।

४ । यदि केनचित् कोणेन तत्संमुखचापो लभ्यते तदा-  
ऽन्येन कोणेन किमित्यनुपातेन तत्संमुखचापो लभ्यत इति  
क्षेत्रमितौ षष्ठाध्याये त्रयस्त्रिंशी प्रतिज्ञोपपादिताऽस्ति तथेदम-  
वगम्यते ।

( १ ) कोणतत्संमुखचापयोरंशादिसंख्या समैव भवति ।

( २ ) निर्दिष्टचापदैर्घ्यात् तच्चापसंमुखकेन्द्रलग्नकोणस्यांशादि  
मानमवगन्तुं शक्यत इति ।

५ । ( २ प्रकमस्यक्षेत्रं द्रष्टव्यम् ) कद-आधाररेखामारभ्य  
कव-रेखाया भ्रमणेन संजातः अकव-कोणो यदा समकोणा-  
न्यूनो भवति तदा स आद्यसमकोणीय उच्यते तत्संमुखचा-  
पश्चाद्यपदीयः । यदा स कोण एकसमकोणादधिकः समकोण-  
द्वयान्यूनस्तदा स द्वितीयसमकोणीय उच्यते तत्संमुखाचापश्च  
द्वितीयपदीयः । एवमग्रेऽपि ।

६ । कद-आधाररेखातः कव-रेखा यथायथाऽनुलोमं  
भ्रमति तथातथा अकव-कोणो वर्धतेऽतः सा यथायथा विलोमं  
भ्रमेत् तथातथा स कोणो ह्रासमियादिति तु स्पष्टतरम् । अत  
एव चतुर्थसमकोणान्तःपाती अकव-कोण ऋणं भवति ।  
कव-रेखाया विलोमभ्रमेण तत्कोणोत्पत्तेः । अत एव तत्कोण-  
संमुखः अव-चापोऽपि ऋणं भवति ।

७ । यस्मात् कस्माच्चिदपि चापात् कोणाद्वा पदं समकोणो  
वा यावदतिरिच्यते तावती तच्चापस्य कोणस्य वा कोटिः स्यात् ।

यथा-(२ प्र०क्षे०द्र०) अय-चापस्य अकव-कोणस्य वा यग-चापः



वक्रग-कोणो वा कोटिः स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने नवतेः शोधिते तयोः कोटिमानमवशिष्यते । यथा— $23^{\circ}$ ,  $15'$ ,  $45''$  । अस्य कोटिः  $66^{\circ}$ ,  $48'$ ,  $15''$  ।

अनु० (१) नवत्यधिकस्य चापस्य कोणस्य वा कोटी ऋणं भवति ।

अनु० (२) जात्यत्र्यस्त्रे लघुकोणयोर्योगस्य नवतितुल्यत्वात् तयोरेकोऽपरस्य कोटिर्भवति ।

८ । यस्मात् कस्माच्चिच्चापात् कोणाद्वा परिध्यर्थं समकोणद्वयं वा यावताऽधिकं तावत् तच्चापस्य कोणस्य वा स्पर्धिसंज्ञं स्यात् ।

यथा—(२ प्र. क्षे. द्र.) अव-चापस्य अकव-कोणस्य वा वघ-चापः वक्रव-कोणो वा स्पर्धी स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने साशीतिशताच्छोधिते तयोः स्पर्धिचापकोणाववशिष्येते ।

यथा— $55^{\circ}$ ,  $35'$ ,  $40''$  । अस्य स्पर्धी— $123^{\circ}$ ,  $28'$ ,  $20''$  ।

अनु० (१) साशीतिशताधिकस्य चापस्य कोणस्य वा स्पर्धी ऋणं भवति ।

अनु० (२) व्यस्तमात्रे कोणत्रययोगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् व्यस्त्रे एककोणस्यापरकोणद्वययोगः स्पर्धी भवति ।

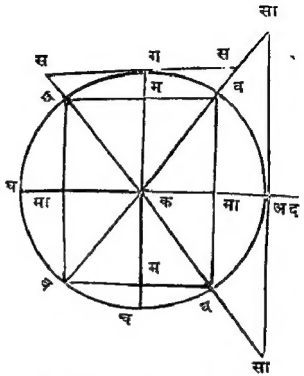
९ । अथ चापकोणयोः सम्बन्धिनः कतिचन पदार्थाः कथ्यन्ते । तत्र चापसम्बन्धिनः पदार्थाश्चापीया उच्यन्ते कोणसम्बन्धिनश्च कोणीयाः ।

जीवादिपरिभाषाः ।

(१) चापस्यैरुमान्ताद्वासं कृत्वा द्वितीयमान्तात् तद्वासोपरि कृतो लम्बस्तच्चापस्य ज्या स्यात् ।

यथा-कल्प्य० कद्-आधाररेखा । यस्या मूलं क-विन्दुः । तं केन्द्रं

कृत्वा कअ-इष्टव्या-  
सार्वेन अगघच वृ-  
त्तं कार्यम् । अघ  
गच व्यासौ च-मि-  
थो लम्बरूपौ विधे-  
यौ । तदा यदि अघ  
इष्टचापः स्यात् य-  
स्य एकममं अ-वि-  
न्दौ द्वितीयं च च-  
तुर्णां पदानामन्य-  
तमस्थान्तर्गतं स्या-  
त् तदा तस्य ज्या  
वमा भवेत् ।



( २ ) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्याने विन्दुं कृत्वा  
तस्मादपरस्यां कृतालम्बात् कोणेष्टविन्दन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य  
ज्या स्यात् ।

यथा—अकय-कोणोत्पादकयोः कद-कसा-रेखयोः कद-रेखायां  
कसा-रेखायाः य-विन्दोर्यदि वमा-लम्बः क्रियते तदा अकय-कोणस्य

ज्या =  $\frac{\text{वमा}}{\text{कय}}$  स्यात् । यदि सा-विन्दोः साअ-लम्बः क्रियते तदा अकय-

कोणस्य ज्या =  $\frac{\text{साअ}}{\text{कसा}}$  स्यात् इयं पूर्वतुल्यैव ।

( ३ ) चापस्पर्शप्रमान्तात् कृते ज्यासे यो लम्बरूपोऽन्यो  
व्यासस्तस्मिन् चापापरप्रमान्तात् कृनो लम्बस्तच्चापस्य कोटि-  
ज्या स्यात् । तच्चापस्य या कोटिस्तस्या ज्येत्यर्थः । इयं ज्या-  
मूलस्य केन्द्रस्य चान्तरेण तुल्या भवति ।

यथा—अव-चापस्य वम कमा च कोटिज्या ।

( ४ ) कोणोत्पादकरेखयोः कस्यां बिदेकतरस्यां स्थिता-  
दिष्टविन्दोरपरस्यां कृतस्य लम्बस्य कोणविन्दोश्चान्तरात् कोणे-  
ष्टविन्दन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य कोटिज्या स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य कोटिज्या =  $\frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  स्यात् ।

( ५ ) चापस्यैकं प्रान्तं स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रापरप्रान्तलग्न-  
रेखावधिर्या रेखा सा तच्चापस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

( ६ ) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्थाने विन्दुं  
प्रकल्प्य तस्मादपरस्यां कृतालम्बालम्बमूलकोणविन्दन्तरेणाप्तं  
तत्कोणस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य स्पर्शरेखा =  $\frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$  स्यात् ।

( ७ ) चापस्यैकप्रान्तं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तावृष्टं  
स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रचापापरप्रान्तलग्नरेखावधिर्या रेखा सा  
तच्चापस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य गस कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

( ८ ) कोणस्य स्पर्शरेखाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन  
यत् संपद्यते तत् कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—पूर्वसिद्धा अकव-कोणस्य स्पर्शरेखा =  $\frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$  ।

∴ अकव-कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा =  $\frac{\text{कमा}}{\text{वमा}} = \frac{\text{अक}}{\text{असा}}$  ।

( ९ ) चापस्यैकप्रान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः

केन्द्रान्निर्गता चापापरमान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य कसा छेदनरेखा ।

( १० ) कोणस्य कोटिज्याया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् कोणस्य छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य कोटिज्या  $= \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  ।

$\therefore$  छेदनरेखा  $= \frac{\text{कव}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{कअ}}$  ।

( ११ ) चापस्यैकमग्नं पूर्वपदार्दि प्रकल्प्य तत्पदान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः केन्द्रान्निर्गता चापापरमान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य कस कोटिच्छेदनरेखा ।

( १२ ) कोणस्य जीवाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् तत्कोणस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अकय-कोणस्य ज्या  $= \frac{\text{यमा}}{\text{कय}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$  ।

$\therefore$  कोटिच्छेदनरेखा  $= \frac{\text{कय}}{\text{यमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{असा}}$  ।

( १३ ) चापजीवामूलयोर्मध्ये यम्यासखण्डं तत् तच्चाप-स्योत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य अमा उत्क्रमज्या स्यात् ।

( १४ ) कोणस्य कोटिज्ययोनं रूपं तत्कोणस्योत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य कोटिज्या  $= \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  ।

∴ उत्क्रमज्या  $= 1 - \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = 1 - \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  ।

( १५ ) चापस्यैकमग्नं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तस्य कोटिमूलस्य च मध्ये यद्व्यासखण्डं तत् तच्चापस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् । यथा अव-चापस्य गम-कोट्युत्क्रमज्या ।

( १६ ) कोणस्य जीवया हीनं रूपं तत्कोणस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य ज्या  $= \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$  ।

∴ कोट्युत्क्रमज्या  $= 1 - \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = 1 - \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$  ।

१० । यदि ( अ ) इदं कस्यचिच्चापस्य कोणस्य वा द्योतकं स्यात् तदाऽस्य ज्यादयः क्रमेणैवं लिख्यन्ते । ज्याअ, कोज्याअ, स्पअ, कोस्पअ, छेअ, कोछेअ, उअ, कोउअ । अत एव ज्याअ अस्य वर्गः  $= ( \text{ज्याअ} )^2$  । कोज्याअ अस्य घनः  $= ( \text{कोज्याअ} )^3$  इत्यादि स्यात् । परमत्र प्रायो लाघवार्थं ज्या<sup>२</sup>अ, कोज्या<sup>३</sup>अ इत्यादि, एवमेव लिख्यते । यद्यपि ज्या<sup>२</sup>अ इत्यादीनां स्थानविशेषेऽर्थोऽन्यथा कल्प्यते ।

११ । चापीयाः कोणीया वा जीवादयः पदविशेषे समकोण-विशेषे वा ऋणत्वं प्राप्नुवन्ति । यथा—( ९ प्र. श्ल. द्रष्टव्यम् ) अव-चापस्य वमा ज्या प्रथमद्वितीयपदयोर्धनगताऽस्ति किन्तु तृतीयचतुर्थपदयोर्दिग्वैपरीत्यादणगता भवति । एवं अकव-

कोणस्यापि ज्या प्रथमद्वितीयसमकोणयोर्धनगता किन्तु तृतीयचतुर्थयोर्लम्बस्य दिग्वैपरीत्यादृणगता भवति ।

एवं प्रतिपदं प्रतिसमकोणं वा जीवादीनां प्रत्येकं धनर्णत्वं निश्चित्य सद्वगमायेदं चक्रं लिख्यते ।

पदाङ्काः समकोणाङ्का वा

चापीयाः कोणीया वा पदार्थाः	१	२	३	४
ज्या	+	+	-	-
कोटिज्या	+	-	-	+
स्पर्शरेखा	+	-	+	-
कोटिस्पर्शरेखा	+	-	+	-
छेदनरेखा	+	-	-	+
कोटिच्छेदनरेखा	+	+	-	-
उत्क्रमज्या	+	+	+	+
कोट्युत्क्रमज्या	+	+	+	+

क्षेत्रे छेदनकोटिच्छेदनरेखायोर्दिगानुलोम्यप्रातिलोम्ये न सम्यगुपलक्ष्येते अतस्तयोर्धनर्णत्वाद्वगमायान्यथा यत्न्यते ।

$$\therefore \text{कय} : \text{कमा} :: \text{कसा} : \text{कअ} \therefore \text{कसा} = \frac{\text{कय} \times \text{कअ}}{\text{कमा}}$$

अत्र यदि अद्य-चापस्य द्योतकं अ स्यात् ।

$$\text{तदा छेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{एवं कोछेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्याअ}}$$

एवं यदि अकय कोणस्य द्योतकं अ स्यात् । तदा—

$$\text{छेअ} = \frac{\text{यक}}{\text{कमा}} = \frac{१}{\text{कमा}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोछेअ} = \frac{\text{कय}}{\text{यमा}} = \frac{१}{\text{यमा}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}}$$

एतेन चापस्य कोणस्य वा छेदनकोटिच्छेदनरेखयोर्धनर्णत्वं क्रमेण कोटिज्याज्ययोरिव भवतीति स्फुटमवगम्यते ।

१२। प्रति समकोणादि कोणीयज्यादीनां मानं प्रतिपदादि चापीयज्यादीनां मानं वा नवमप्रक्रमस्थक्षेत्रदर्शनेन शीघ्रमवगम्यते ।

घालावयोधाय तद्विलिख्य प्रदर्श्यते ।

कोणीयाश्चापीया वा ज्यादयः	अ वा ०°	ग ९०°	घ १८०°	च २७०°
ज्या	०	१	०	-१
कोटिज्या	१	०	-१	०
स्पर्शरेखा	०	∞	०	∞
कोटिस्पर्शरेखा	∞	०	∞	०
छेदनरेखा	१	∞	-१	∞
कोटिच्छेदनरेखा	∞	१	∞	-१
चतुर्कमज्या	०	१	२	१
कोट्युत्तकमज्या	१	०	१	२

अत्र कव-त्रिज्यां रूपं प्रकल्प्य चापीयज्यादीनां मानं लिखितमस्तीति बोध्यम् ।

१३। अयं नवमप्रक्रमोक्तसंज्ञानां सम्यग्ज्ञानाय कोणीयज्यादीनां कतिचन मितः सम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते ।

( ९ प्र-क्षेत्रदर्शनम् ) कल्प्यते अ=अकव तदा—

$$( १ ) \quad ज्याअ = \frac{वमा}{कव} = \frac{वमा-घमा}{कव-वमा} = \frac{१}{कोटिअ} ।$$

$$(२) \quad \text{कोज्याअ} = \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कमा}}{\text{कव} \div \text{कमा}} = \frac{१}{\text{छेअ}} ।$$

$$(३) \quad \text{स्पअ} = \frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{वमा} \div \text{कव}}{\text{कमा} \div \text{कव}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$$

$$(४) \quad \text{कोस्पअ} = \frac{\text{कमा}}{\text{वमा}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{१}{\text{स्पअ}} ।$$

$$(५) \quad \text{छेअ} = \frac{\text{कव}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कव} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$(६) \quad \text{कोछेअ} = \frac{\text{कव}}{\text{वमा}} = \frac{\text{कव} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} ।$$

$$(७) \quad \text{सअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}} ।$$

$$(८) \quad \text{कोसअ} = १ - \text{ज्याअ} = १ - \frac{१}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$(९) \quad \text{ज्या}^२\text{अ} + \text{कोज्या}^२\text{अ} = \left( \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} \right)^२ + \left( \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} \right)^२ \\ = \frac{\text{वमा}^२ + \text{कमा}^२}{\text{कव}^२} = \frac{\text{कव}^२}{\text{कव}^२} = १ ।$$

∴ ज्या<sup>२</sup>अ = १ - कोज्या<sup>२</sup>अ । कोज्या<sup>२</sup>अ = १ - ज्या<sup>२</sup>अ ।

१४ । अथ कोणीयज्यादीनां क्रमेण चापीयज्यादिभिर्यः  
संवन्धः सं प्रदर्शयते ।



यदि अ-कोणस्य संमुखचापः आ स्यात् तदा (९ प्र. क्षे. द्र. ) ।

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = \text{ज्याअ} \therefore \text{ज्याआ} = \text{त्रि. ज्याअ} ।$$

तत्र यदि त्रि=१ तदा ज्याआ=ज्याअ । एवं कोटिज्यादिष्वपि ।

अनेनेदमवगम्यते । कोणीयजीवादयो रूपव्यासार्धे चापीया भवन्ति । एवमिष्टव्यासार्धेन गुणितास्ता इष्टव्यासार्धे चापीया भवन्ति । एवं गुणविपर्ययेण चापीयाभ्यः कोणीया भवन्तीति ।

१५ । ( अनु० ) यदि कस्मिँश्चित् त्रिकोणमितिके राशौ समीकरणे वा स्थिताः कोणीया जीवादय इष्टव्यासार्धे चापीयत्वेनापेक्षितास्तदा तामु कोणीयज्यादिषु इष्टव्यासार्धमिते त्रिहरे कल्पिते ताश्चापीया भवन्ति ।

यथा—ज्या<sup>२</sup>अ + कोज्या<sup>२</sup>अ = १ अत्रत्यज्याकोटिज्ययोः क्रमेण

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}}, \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}} \text{ आभ्यामुत्थापितयोः}$$

$$\left( \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}} \right)^2 + \left( \frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} \right)^2 = १, \text{ एवं सिद्धपति ।}$$

$\therefore \text{ज्या}^2\text{आ} + \text{कोज्या}^2\text{आ} = \text{त्रि}^2$  । एवमत्र ज्याकोटिज्ये चापीये सिद्धे ।

## अध्यायः २

अत्र कोणानां योगान्तरज्यादिसाधनं ज्यादिसंबन्धयोगान्तरव-  
धफलानां मानानि चार्धांशज्याकोटिज्यानयनं ज्यादीनां मानानां वै-  
चित्र्यं निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पा-  
दनप्रकारश्चेति प्रोच्यते ।



∴ घच = टज, घट = जअ । एते त्रिभुजे, कटन, कवम त्रिभुजे  
चैतानि मिथः सजातीयानि भवन्ति ।

$$\text{एवं, ज्याअ} = \frac{\text{वम}}{\text{कव}} \quad \text{ज्याक} = \frac{\text{घट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{घट}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{कम}}{\text{कव}} \quad \text{कोज्याक} = \frac{\text{कट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{कट}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{तथा । ज्या (अ+क)} = \frac{\text{घट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{घट}}{\text{कव}} \quad \text{ज्या (अ-क)} = \frac{\text{अग}}{\text{कअ}} = \frac{\text{अग}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{कोज्या (अ+क)} = \frac{\text{कट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{कट}}{\text{कव}} \quad \text{कोज्या (अ-क)} = \frac{\text{कग}}{\text{कअ}} = \frac{\text{कग}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{एवं, घट} = \text{चट} + \text{घच} = \text{टन} + \text{घच} \quad |$$

$$\text{अग} = \text{टन} - \text{टज} = \text{टन} - \text{घच} \quad |$$

$$\text{कट} = \text{कन} - \text{डन} = \text{कन} - \text{चट} \quad |$$

$$\text{कग} = \text{कन} + \text{नग} = \text{कन} + \text{अज} = \text{कन} + \text{चट} \quad |$$

$$\text{तत्र त्रिभुजसजात्यात्,} \quad \frac{\text{टन}}{\text{कट}} = \frac{\text{वम}}{\text{कव}} = \frac{\text{चट}}{\text{घट}} \quad |$$

$$\text{टन} = \frac{\text{वम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} \quad \text{चट} = \frac{\text{वम} \cdot \text{घट}}{\text{कघ}} \quad |$$

$$\frac{\text{घच}}{\text{घट}} = \frac{\text{कम}}{\text{कव}} = \frac{\text{कन}}{\text{कट}} \quad \therefore \text{घच} = \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \quad | \text{ तथा, कन} = \frac{\text{कम} \cdot \text{कट}}{\text{कघ}} \quad |$$

$$\text{तथा च, घट} = \frac{\text{वम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} + \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \quad \therefore \frac{\text{घट}}{\text{कव}} = \frac{\text{वम} \cdot \text{कट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} + \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} \quad |$$

$$\text{अग} = \frac{\text{वम.कट}}{\text{कव}} - \frac{\text{कम.घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{अग}}{\text{कव}} = \frac{\text{वम.कट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कव}}{\text{कव}} - \frac{\text{कम.घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कव}}{\text{कव}} ।$$

$$\text{कड} = \frac{\text{कम.कट}}{\text{कव}} - \frac{\text{वम.घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कड}}{\text{कव}} = \frac{\text{कम.कट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कव}}{\text{कव}} - \frac{\text{वम.घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कव}}{\text{कव}} ।$$

$$\text{कग} = \frac{\text{कम.कट}}{\text{कव}} + \frac{\text{वम.घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कग}}{\text{कव}} = \frac{\text{कम.कट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कव}}{\text{कव}} + \frac{\text{वम.घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कव}}{\text{कव}} ।$$

∴ ज्या (अ + क) = ज्याअ.कोज्याक + कोज्याअ.ज्याक । (१)

ज्या (अ - क) = ज्याअ.कोज्याक - कोज्याअ.ज्याक । (२)

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ.कोज्याक - ज्याअ.ज्याक । (३)

कोज्या (अ - क) = कोज्याअ.कोज्याक + ज्याअ.ज्याक । (४)

एतदानयनं क-कोणं अ-कोणाल्लघुं प्रकल्प्य (अ + क) कोणं च समकोणान्न्यूनं प्रकल्प्य कृतं किन्तु क-कोणस्य अ-कोणादधिकत्वे (अ + क) कोणस्य च समकोणादधिकत्वे चौत्तरीत्या कोणैक्यान्तरज्याकोटिज्ये पूर्वसाधिते एव सम्पद्यते ।

१७ । अनु० । अनन्तरप्रक्रमस्य—( २, ४ ) समीकरणयोः यदि अ-कोणः शून्यं कल्प्येत तदा—

ज्या ( - क ) = - ज्याक । कोज्या ( - क ) = कोज्याक ।

अनेनेदमवगम्यते । ऋणगतकोणस्य ज्या ऋण भवति कोटिज्या च घन भवतीति ।

$$\text{अत एव स्प ( - क )} = \frac{\text{ज्या ( - क )}}{\text{कोज्या ( - क )}} = \frac{-\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}} = -\text{स्पक} ।$$

एवमेव कोस्प ( - क ) = -कोस्पक । छे ( - क ) = छेक ।

कोछे ( - क ) = -कोछेक । उ ( - क ) = उक ।

कोउ ( - क ) = २ - कोउक ।

१८ । अनु० । यदि १६ प्रक्रमे ( २, ४ ) अनयोरेव  
 $\alpha = १८०^\circ$  स्युः । तदा—

ज्या  $(१८०^\circ - \kappa) =$  ज्या  $१८०^\circ \times$  कोज्या  $\kappa -$  कोज्या  $१८०^\circ \times$  ज्या  $\kappa$  ।  
 $(१२ प्र०) = ० \times$  कोज्या  $\kappa + १ \times$  ज्या  $\kappa =$  ज्या  $\kappa$  ।

कोज्या  $(१८०^\circ - \kappa) =$  कोज्या  $१८०^\circ \times$  कोज्या  $\kappa +$  ज्या  $१८०^\circ \times$  ज्या  $\kappa$   
 $= -१ \times$  कोज्या  $\kappa +$  ज्या  $० \times$  ज्या  $\kappa = -$  कोज्या  $\kappa$  ।

अनेनेदमवगम्यते । कोणस्य ज्या तद्धीनसमकोणद्वयस्य ज्याया  
 तुल्या भवति । कोणोनसमकोणद्वयस्य कोटिज्या च तत्कोणकोटिज्यया  
 भ्रूणगतया तुल्या भवतीति ।

अत एव स्प  $(१८०^\circ - \kappa) = \frac{\text{ज्या}(१८०^\circ - \kappa)}{\text{कोज्या}(१८०^\circ - \kappa)} = \frac{\text{ज्या}\kappa}{- \text{कोज्या}\kappa} = -\text{स्प}\kappa$  ।

एवमेव कोस्प  $(१८०^\circ - \kappa) = -\text{कोस्प}\kappa$  । छे  $(१८०^\circ - \kappa) = -\text{छे}\kappa$  ।  
 एवं : ज्या  $(\alpha + \kappa) =$  ज्या  $\alpha \cdot$  कोज्या  $\kappa +$  कोज्या  $\alpha \cdot$  ज्या  $\kappa$  ।  
 तथा कोज्या  $(\alpha + \kappa) =$  कोज्या  $\alpha \cdot$  कोज्या  $\kappa -$  ज्या  $\alpha \cdot$  ज्या  $\kappa$  ।

∴ यदि  $\alpha = ९०^\circ$  तदा ज्या  $(९०^\circ + \kappa) =$  कोज्या  $\kappa$  ।

तथा कोज्या  $(९०^\circ + \kappa) = -$  ज्या  $\kappa$  ।

एवं यदि  $\alpha = १८०^\circ$  तदा ज्या  $(१८०^\circ + \kappa) = -$  ज्या  $\kappa$  ।

कोज्या  $(१८०^\circ + \kappa) = -$  कोज्या  $\kappa$

१९ । षोडशप्रक्रमोक्तानि ( १, २, ३, ४ ), एतानि  
 समीकरणानि यदीष्टव्यासार्थं चापीयान्यपेक्षितानि स्पुस्तदा  
 ( प्र० १५ ) रीत्या ।

$$\frac{\text{ज्या}(\text{अ} + \text{क})}{\text{त्रि}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\text{ज्या}(\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

$$\text{एवमेव ज्या}(\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

अत एव श्रीभास्कराचार्यः सिद्धान्तशिरोमणेरन्यज्योत्पत्तौ-

“चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथः कोटिज्यकाहते ।

त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं तच्चापैक्यस्य दोर्ज्यका ॥

चापान्तरस्य जीवा स्यात् तयोरन्तरसंपिता”-इति ।

$$\text{एवम् } \frac{\text{कोज्या}(\text{अ} + \text{क})}{\text{त्रि}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\therefore \text{कोज्या}(\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

$$\text{एवम् कोज्या}(\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

अत एव श्रीकमलाकरभट्टस्तत्त्वविवेकस्पष्टाधिकारे ज्योत्पत्तौ-

“दोर्ज्ययोः कोटिमौन्योश्च घातौ त्रिज्याद्धृतौ तयोः ।

वियोगयोगौ जीवे स्तच्चापैक्यान्तरकोटिजे”-इति ॥

२० । अथ चापद्वययोगान्तरस्पर्शरेखादिस्वरूपम् ।

यतः

$$\text{ज्या}(\text{अ} + \text{क}) = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक} । (१)$$

ज्या ( अ - क ) = ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक । ( २ )

कोज्या ( अ + क ) = कोज्याअ . कोज्याक - ज्याअ . ज्याक । ( ३ )

कोज्या ( अ - क ) = कोज्याअ . कोज्याक + ज्याअ . ज्याक । ( ४ )

अतः ( १ ) ( २ ) अनयोः ( ३ ) ( ४ ) अनयोश्च पृथक् योगान्तराभ्याम्

ज्या ( अ + क ) + ज्या ( अ - क ) = २ ज्याअ . कोज्याक ।

ज्या ( अ + क ) - ज्या ( अ - क ) = २ कोज्याअ . ज्याक ।

कोज्या ( अ + क ) + कोज्या ( अ - क ) = २ कोज्याअ . कोज्याक ।

कोज्या ( अ - क ) - कोज्या ( अ + क ) = २ ज्याअ . ज्याक ।

एवम् ( १ ) ( २ ) अनयोर्वधतः

ज्या ( अ + क ) . ज्या ( अ - क ) = ज्या<sup>२</sup>अ . कोज्या<sup>२</sup>क - कोज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क

= ज्या<sup>२</sup>अ ( १ - ज्या<sup>२</sup>क ) - ( १ - ज्या<sup>२</sup>अ ) ज्या<sup>२</sup>क

= ज्या<sup>२</sup>अ - ज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>क + ज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क

= ज्या<sup>२</sup>अ - ज्या<sup>२</sup>क = ( ज्याअ + ज्याक ) ( ज्याअ - ज्याक )

= १ - कोज्या<sup>२</sup>अ - ( १ - कोज्या<sup>२</sup>क ) = कोज्या<sup>२</sup>क - कोज्या<sup>२</sup>अ

= ( कोज्याअ + कोज्याक ) ( कोज्याक - कोज्याअ ) ।

एवमेव ( ३ ) ( ४ ) अनयोर्वधतः कोज्या ( अ + क ) . कोज्या ( अ - क )

= कोज्या<sup>२</sup>अ . कोज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क

= ( १ - ज्या<sup>२</sup>अ ) कोज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>अ ( १ - कोज्या<sup>२</sup>क )

= कोज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>अ = ( कोज्याक + ज्याअ ) ( कोज्याक - ज्याअ )

= १ - ज्या<sup>२</sup>क - १ + कोज्या<sup>२</sup>अ = कोज्या<sup>२</sup>अ - ज्या<sup>२</sup>क

= ( कोज्याअ + ज्याक ) ( कोज्याअ - ज्याक ) ।

एवम् ( १ ) अस्मिन् ( २ ) अनेन मत्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या ( अ + क )}}{\text{ज्या ( अ - क )}} = \frac{\text{ज्याअ . कोज्याक + कोज्याअ . ज्याक}}{\text{ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक}} ।$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}} + \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}}{\frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}} - \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{\text{स्पअ} - \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पक} - \text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{१ + \text{कोस्पअ} \cdot \text{स्पक}}{१ - \text{कोस्पअ} \cdot \text{स्पक}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}$$

$$\text{एवमेव } \frac{\text{कोज्या (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ-क)}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पक} + \text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}$$

$$= \frac{१ - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}}$$

एवम् ( १ )-अस्मिन् ( ३ ) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ+क)}} = \frac{\text{स्प (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ+क)}} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}$$



$$= \frac{१ + कोस्पअ . स्पक}{कोस्पअ - स्पक} = \frac{स्पअ . कोस्पक + १}{कोस्पक - स्पअ} ।$$

एवमेव ( २ ) अस्मिन् ( ४ ) अनेन भक्ते लब्धम्

$$स्प(अ-क) = \frac{ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक}{कोज्याअ . कोज्याक + ज्याअ . ज्याक} = \frac{स्पअ - स्पक}{१ + स्पअ . स्पक} ।$$

२१ । ज्याकोटिज्ययोः स्वरूपान्तरं प्रदर्शयते ।

कल्प्यते अ = प + फ, क = प - फ,

∴ प = १/२ ( अ + क ), फ = १/२ ( अ - क ),

∴ ज्याअ = ज्या ( प + फ ) = ज्याप . कोज्याफ + कोज्याप . ज्याफ  
= ज्या १/२ ( अ + क ), कोज्या १/२ ( अ - क )

+ कोज्या १/२ ( अ + क ), ज्या १/२ ( अ - क ) = ( आ ) ।

एवमेव ज्याक

= ज्या १/२ ( अ + क ) . कोज्या १/२ ( अ - क )

- कोज्या १/२ ( अ + क ) . ज्या १/२ ( अ - क ) = ( का ) ।

कोज्याअ

= कोज्या १/२ ( अ + क ) . कोज्या १/२ ( अ - क )

, - ज्या १/२ ( अ + क ) . ज्या १/२ ( अ - क ) = ( गा ) ।

कोज्याक

= कोज्या १/२ ( अ + क ) . कोज्या १/२ ( अ - क )

+ ज्या १/२ ( अ + क ) . ज्या १/२ ( अ - क ) = ( घा ) ।

२२ । अनेन ज्ययोः कोटिज्ययोश्च योगान्तरे प्रदर्शयते ।

( आ ) ( का ) अनयो ( गा ) ( घा ) अनयोश्च पृथग्योगा-

न्तराभ्या सिद्धम्—

ज्याअ + ज्याक

$$= \text{ॐ } २ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (पा) ।$$

ज्याअ - ज्याक

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (फा) ।$$

कोज्याअ + कोज्याक

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (बा) ।$$

कोज्याक - कोज्याअ

$$= २ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (भा) ।$$

( १ ) ( पा ) अस्मिन् ( फा ) अनेन भक्ते लब्धम्

$$= \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}} = \frac{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \cdot \text{कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}{२ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}$$

ॐ अत इष्टव्यासार्धे परिणामिते ज्याअ + ज्याक

$$= \frac{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}{\text{त्रि}} । \text{ ज्याअ} - \text{ज्याक}$$

$$= \frac{२ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}{\text{त्रि}} । \text{ अतः}$$

“चापविश्लेषयोगार्धजीवे कोटिज्यकाहते ।

मिथीस्त्रिज्याहते द्विज्यौ चापज्यावियुतिर्युतिः” ।

इति विशेषोक्तमुपपद्यते ।

† अत्रापीष्टव्यासार्धे परिणामनेन

“चापविश्लेषयोगार्धज्ययोः कोटिज्ययोर्हतिः ।

द्विगुणा त्रिगुणास्त च कोटिज्यावियुतिर्युतिः ” ॥

इदमपि विशेषोक्तमुपपद्यते ।

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})} \times \frac{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \times \text{कोस्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})$$

$$= \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \times \frac{1}{\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

(२) (वा) अस्मिन् (भा) भक्ते लब्धम्

$$= \frac{\text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{कोस्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})$$

$$(३) \text{ पा - वा } = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}{२ \text{ कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})} = \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})$$

$$(४) \text{ पा - भा } = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२ \text{ कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}{२ \text{ ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})} = \text{कोस्प } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})$$

$$(५) पाःभा = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क}) ।$$

$$(६) काःधा = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}} = \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क}) ।$$

२३ । व्यादिगुणितभुजांशंजीवाकोटिज्यादि प्रदर्श्यते ।

$$\therefore \text{ज्या } (न+१) \text{अ} = \text{ज्या } (\text{अन} + \text{अ}) \\ = \text{ज्याअन} \cdot \text{कोज्याअ} + \text{कोज्याअन} \cdot \text{ज्याअ} ।$$

$$\text{कोज्या } (न+१) \text{अ} = \text{कोज्या } (\text{अन} + \text{अ}) \\ = \text{कोज्याअन} \cdot \text{कोज्याअ} - \text{ज्याअन} \cdot \text{ज्याअ} ।$$

यदि न = १, २, ३, ... .. स्यात्

$$\text{तदा } (१) \text{ज्या } २ \text{अ} = २ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ} ।$$

$$(२) \text{कोज्या } २ \text{अ} = \text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^२ \text{अ} । \\ = १ - २ \text{ज्या}^२ \text{अ} = २\text{कोज्या}^२ \text{अ} - १ ।$$

$$(३) \text{ज्या } ३ \text{अ} = \text{ज्या } २ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ} + \text{कोज्या } २ \text{अ} \cdot \text{ज्याअ} \\ = २ज्याअ \cdot \text{कोज्या}^२ \text{अ} + \text{कोज्या}^२ \text{अ} \cdot \text{ज्याअ} - \text{ज्या}^२ \text{अ} \\ = ३ज्याअ \cdot \text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^३ \text{अ} = ३ज्याअ - ४\text{ज्या}^३ \text{अ} ।$$

$$(४) \text{कोज्या } ३ \text{अ} = \text{कोज्या } २ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ} - \text{ज्या } २ \text{अ} \cdot \text{ज्याअ} \\ = (२\text{कोज्या}^२ \text{अ} - १) \cdot \text{कोज्याअ} - २ज्या^२ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ} \\ = २\text{कोज्या}^२ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ} - २\text{कोज्याअ} + २\text{कोज्या}^२ \text{अ} \\ = ४ \text{कोज्या}^२ \text{अ} - ३ \text{कोज्याअ}, \text{ इत्यादि ।}$$

२४ । द्विगुणज्याकोटिज्याप्रदर्शनं ततोर्ध्वांशज्या-  
कोटिज्यानपनं च ।

अनन्तरौक्तप्रक्रमस्यात् ( २ ) अस्मात्

$$२ ज्या^१अ = १ - कोज्या २ अ = \quad ( पा ) ।$$

$$२ कोज्या^१अ = १ + कोज्या २ अ = \quad ( फा ) ।$$

( १ ) यदि ( पा ) इदं ( फा ) अनेन द्रियते

$$तदा \frac{ज्या^१अ}{कोज्या^१अ} = स्प^१अ = \frac{१ - कोज्या २ अ}{१ + कोज्या २ अ} ।$$

( २ ) यदि ( पा ), ( फा ) अनयोः ( २अ ) ( इदम् ) ( अ ) अनेनोत्थाप्यते

$$\left. \begin{array}{l} तदा २ ज्या^१अ = १ - कोज्या २ अ \\ २ कोज्या^१अ = १ + कोज्या २ अ \end{array} \right\} एतयोः ( १५ ) प्रक्रमोक्तरीत्या इष्ट-  
ज्यासार्धे परिणामितयोः सिद्धम्$$

$$२ ज्या^१अ = त्रि^२ - त्रि . कोज्या २ अ = त्रि ( त्रि - कोज्या २ अ ) = ( ता ) ।$$

$$२ कोज्या^१अ = त्रि^२ + त्रि . कोज्या २ अ = त्रि ( त्रि + कोज्या २ अ ) = ( था ) ।$$

$$( ३ ) ( ता ) अस्मादिदमुत्पद्यते २ ज्या^१अ = \frac{२ त्रि^२ - २ त्रि . कोज्या २ अ}{२}$$

$$= \frac{ज्या^१अ + कोज्या^१अ + त्रि^२ - २ त्रि . कोज्या २ अ}{२} = \frac{ज्या^१अ + ( त्रि - कोज्या २ अ )^२}{२}$$

$$= \frac{ज्या^१अ + उ^१अ}{२}, \quad \therefore ज्या^१अ = \frac{१}{२} \sqrt{ज्या^१अ + उ^१अ}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्दलं तदर्धशकशिखिनी स्यात्”—इति ।

$$एवम् ज्या^१अ = \sqrt{\frac{१}{२} त्रि ( त्रि - कोज्या २ अ )} = \sqrt{\frac{१}{२} त्रि . उ अ} ।$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं तदर्धशकशिखिनी वा”—इति ।

( ४ ) यदि ( ता ), ( था ) अत्र ( अ ) वर्णः ( ९०° ± अ ) अनेनोत्थाप्यते

$$तदा २ ज्या^१अ ( ९०° + अ ) = त्रि^२ - त्रि . कोज्या ( ९०° ± अ )$$

$$= त्रि^२ ± त्रि . ज्या अ ।$$

$$\begin{aligned} २ \text{ कोज्या }^{\frac{१}{२}} (९०^{\circ} \mp \alpha) &= \text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \mp \text{त्रि} \cdot \text{कोज्या} (९०^{\circ} \mp \alpha) \\ &= \text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \pm \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ} । \end{aligned}$$

$$\text{ज्या } \frac{१}{२} (९०^{\circ} \mp \alpha) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \mp \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ}}{२}}$$

$$\text{कोज्या } \frac{१}{२} (९०^{\circ} \mp \alpha) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \pm \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ}}{२}}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“त्रिज्याभुजज्याहतिहीनयुक्ते त्रिज्याकृती तदल्लयोः पदे स्तः ।  
भुजोनयुक्तत्रिभखण्डयोज्ये कोटिं भुजज्यां परिकल्प्य चैवम्”—इति॥

२५ । ( २२ ) मन्त्रमस्थयोः ( फा ) ( भा ) अनयो-  
र्वर्गयोगे कृते सिद्धम् ।

$$\begin{aligned} &(\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^2 + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^2 \\ &= ४ \text{ कोज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) \cdot \text{ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \\ &\quad + ४ \text{ ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) \cdot \text{ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \\ &= ४ \text{ ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \{ \text{कोज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) + \text{ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) \} \\ &= ४ \text{ ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ज्या } \frac{१}{२} (\alpha - \kappa) = \frac{१}{२} \sqrt{(\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^2 + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^2}$$

एवमनेकधा ।

अस्मिन्निष्टव्यासार्धे परिणामितेऽपि विकारो न भवति । अत एव  
भास्कराचार्यः—

“यदोर्ज्ययोरन्तरमिष्टयोर्यत् कोटिज्ययोस्तत्कृतिपोगमूलम् ।  
दलीकृतं स्याद्भुजयोर्वियोगखण्डस्य जीवैवमनेकधा वा”—इति॥

२६ । अनन्तरप्रक्रमस्थसमीकरणे यदि (क) काणः  
(९०°-अ) अनेनोत्थाप्यते तदा—

$$\begin{aligned} \text{ज्या} \frac{1}{2} \{ \text{अ} - (९०^\circ - \text{अ}) \} &= \frac{1}{2} \sqrt{(\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2 + (\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2}{2}} \text{ एवमनेकधा ।} \end{aligned}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“दोःकोटिजीवाविवरस्य वर्गो दलीकृतस्तस्य पदेन तुल्या ।  
स्यात् कोटिबाहोर्विवरार्धजीवा .....”—इति ।

२७ । भुजकोटिचापांशान्तरज्यानयनम् ।

१। (२४) प्रक्रमतः कोज्या२अ = १ - २ज्या²अ ।

अस्मिन्निष्टव्यासार्धे परिणामिते कोज्या२अ = त्रि -  $\frac{२ज्या²अ}{त्रि}$

वा कोज्या२अ = ज्या (९०°-२अ) = ज्या { (९०°-अ) - अ }  
= त्रि -  $\frac{ज्या²अ}{३त्रि}$  एवमनेकधा ।

अत एव श्रीभास्कराचार्यः—

“दोर्ज्याकृतिर्व्यासदलार्धमक्ता लब्धत्रिमौर्व्योर्विवरेण तुल्या ।  
दोःकोटिभागान्तरशिञ्जिनी स्यात् ....”—इति ।

२८ । अयं पूर्वोक्तार्धांशज्याकोटिज्ययो रूपान्तरानयनम् ।

“ १ = कोज्या²अ + ज्या²अ ।

एवम् ज्या२अ = २ ज्याअ . कोज्याअ

१ + ज्या२अ = कोज्या²अ + २ ज्याअ . कोज्याअ + ज्या²अ  
= (कोज्याअ + ज्याअ)² ।

$$१ - ज्या २ अ = कोज्या^२ अ - १, २ ज्याअ - कोज्याअ + ज्या^२ अ \\ = (कोज्याअ - ज्याअ)^२$$

$$\therefore कोज्याअ + ज्याअ = \pm \sqrt{१ + ज्या २ अ}$$

$$कोज्याअ - ज्याअ = \pm \sqrt{१ - ज्या २ अ}$$

$$(१) अत्र यदि २अ < ९०^{\circ} \therefore अ < ४५^{\circ}$$

तदा पूर्वसमीकरणमीदृक् स्यात्—

$$\left. \begin{aligned} कोज्याअ + ज्याअ &= \sqrt{१ + ज्या २ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= \sqrt{१ - ज्या २ अ} \end{aligned} \right\} \quad (पा)$$

$$(२) यदि २अ > ९०^{\circ} < १८०^{\circ} अतः अ > ४५^{\circ} < ९०^{\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} तदा कोज्याअ + ज्याअ &= \sqrt{१ + ज्या २ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= -\sqrt{१ - ज्या २ अ} \end{aligned} \right\} \quad (फा)$$

$$(३) यदि २अ > १८०^{\circ} < २७०^{\circ} \therefore अ > ९०^{\circ} < १३५^{\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} तदा कोज्याअ + ज्याअ &= \sqrt{१ - ज्या २ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= -\sqrt{१ + ज्या २ अ} \end{aligned} \right\} \quad (बा)$$

$$(४) यदि २अ > २७०^{\circ} < ३६०^{\circ} \therefore अ > १३५^{\circ} < १८०^{\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} तदा कोज्याअ + ज्याअ &= -\sqrt{१ - ज्या २ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= -\sqrt{१ + ज्या २ अ} \end{aligned} \right\} \quad (भा)$$

२ (५) (पा) (फा) अनयोः प्रत्येकयोगान्तरतः सिद्धम्

$$कोज्याअ = \frac{१}{२} (\sqrt{१ + ज्या २ अ} \pm \sqrt{१ - ज्या २ अ})$$

$$ज्याअ = \frac{१}{२} (\sqrt{१ + ज्या २ अ} \mp \sqrt{१ - ज्या २ अ}) .$$

अत्र यथा यथा नवत्यल्पः कोणः ४५ अंशेभ्यो न्यूनोऽधिको वा स्यात् तथा तथा प्रतिसमीकरणं द्वितीयपक्षस्य द्वितीयपदविहमूर्ध्वमधरं वा बोध्यम् ।



२९ । शिष्यबुद्धिवैशद्यार्थमस्मिन् प्रक्रमे ज्यादीनां मानानां वैचित्र्यं प्रदर्श्यते (यच्च पूर्वोक्तप्रक्रमेभ्यः स्वल्पायासेनोत्पद्यते)

$$(१) \text{ को ज्याअ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}} = \text{कोज्याअ} \cdot \text{स्पअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}}$$

$$= \frac{\text{छेअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}}{\text{छेअ}}$$

$$(२) \text{ कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}}$$

$$(३) \text{ स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{छेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}$$

॥ १, २, ३, ... .. इत्यादीनां वैशद्य मन्थान्ते द्रष्टव्यम् ।

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्प}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}}{१ - \text{उअ}} \quad !$$

$$(४) \text{कोस्पअ} = \frac{१}{\text{स्पअ}} = \sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ} - १}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{छेअ}}{\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{ज्या}^2\text{अ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{\text{छे}^2\text{अ} - १}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{स्प}^2\text{अ}} = \frac{१ - \text{उअ}}{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}} \quad !$$

$$(५) \text{छेअ} = \sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^2\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ} - १}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोछेअ}}{१ - \text{उअ}} \quad !$$

$$(६) कोछेअ = \sqrt{१ + कोस्प^२अ} = \frac{१}{ज्याअ} = \frac{छेअ}{स्पअ}$$

$$= \frac{कोस्पअ}{कोज्याअ} = \frac{१}{कोज्याअ \cdot स्पअ} = \frac{स्पअ \cdot कोस्पअ}{ज्याअ}$$

$$= \frac{कोज्याअ \cdot छेअ}{ज्याअ} = \frac{१}{\sqrt{१ - कोज्या^२अ}} = \frac{\sqrt{१ + स्प^२अ}}{स्पअ}$$

$$= \frac{छेअ}{\sqrt{छे^२अ - १}} = कोस्पअ \cdot छेअ = \frac{१}{\sqrt{२ उअ - उ^२अ}}$$

$$(७) उअ = १ - कोज्याअ = १ - \sqrt{१ - ज्या^२अ}$$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + स्प^२अ}} = १ - \frac{कोस्पअ}{\sqrt{१ + कोस्प^२अ}}$$

$$= १ - \frac{१}{छेअ} = १ - \frac{\sqrt{कोछे^२अ - १}}{कोछेअ}$$

३०. अस्मिन् प्रक्रमे कोणस्य ज्यादिभ्यो द्विगुणस्य तत्कोणस्य ज्यादीनां मानानि प्रदर्श्यन्ते ।

$$(१) ज्या२अ = २ज्याअ \cdot कोज्याअ = \frac{२ज्या^२अ}{स्पअ} = \frac{२कोज्या^२अ}{कोस्पअ}$$

$$= \frac{२ज्याअ}{छेअ} = \frac{२कोज्याअ}{कोछेअ} = \frac{२स्पअ}{१ + स्प^२अ} = \frac{२स्पअ}{छे^२अ}$$

$$= \frac{२}{स्पअ + कोस्पअ} = \frac{२कोस्पअ}{१ + कोस्प^२अ} = \frac{२कोस्पअ}{कोछे^२अ}$$

$$(२) कोज्या२अ = कोज्या^२अ - ज्या^२अ = १ - २ ज्या^२अ$$

$$= २कोज्या^२अ - १ = \frac{१ - स्प^२अ}{१ + स्प^२अ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{कोस्पअ + स्पअ}$$

$$= \frac{कोस्प^२अ - १}{कोस्प^२अ + १} = \frac{२ - छे^२अ}{छे^२अ} = \frac{२कोज्याअ - छेअ}{छेअ}$$

$$= \frac{कोछे^२अ - २}{कोछे^२अ} = \frac{कोछेअ - २ज्याअ}{कोछेअ} ।$$

$$(३) स्प२अ = \frac{२स्पअ}{१-स्प^२अ} = \frac{२}{कोस्पअ - स्पअ} = \frac{२ज्याअ \cdot कोज्याअ}{१ - २ज्या^२अ}$$

$$= \frac{२ज्याअ \cdot कोज्याअ}{२कोज्या^२अ - १} = \frac{२कोस्पअ}{कोस्प^२अ - १} = \frac{२स्पअ}{२ - छे^२अ} = \frac{२कोस्पअ}{कोछे^२अ - २} ।$$

$$(४) कोस्प२अ = \frac{१-स्प^२अ}{२स्पअ} = \frac{कोस्प^२अ - १}{२कोस्पअ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{२}$$

$$= \frac{१-२ज्या^२अ}{२ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{२कोज्या^२अ - १}{२ज्याअ कोज्याअ} = \frac{२-छे^२अ}{२स्पअ}$$

$$= \frac{कोछे^२अ - २}{२कोस्पअ} ।$$

$$(५) छे२अ = \frac{छे^२अ}{२-छे^२अ} = \frac{छेअ}{२कोज्याअ - छेअ} = \frac{१}{२कोज्या^२अ - १}$$

$$= \frac{१}{१-२ज्या^२अ} = \frac{१+स्प^२अ}{१-स्प^२अ} = \frac{कोस्पअ+स्पअ}{कोस्पअ-स्पअ} = \frac{कोस्प^२अ+१}{कोस्प^२अ-१}$$

$$= \frac{कोछे^२अ}{कोछे^२अ-१} ।$$

$$(६) कोछे२अ = २छेअ \cdot कोछेअ = \frac{छेअ}{२ज्याअ} = \frac{कोछेअ}{२कोज्याअ}$$

$$= \frac{१}{२ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{१+स्प^२अ}{२स्पअ} = \frac{छे^२अ}{२स्पअ} = \frac{स्पअ+कोस्पअ}{२}$$

$$= \frac{१+कोस्प^२अ}{२कोस्पअ} = \frac{कोछे^२अ}{२कोस्पअ} ।$$

$$(७) व२अ = २ज्या^२अ = २-२कोज्या^२अ = \frac{२स्प^२अ}{१+स्प^२अ}$$

$$= \frac{२स्प^२अ}{छे^२अ} = \frac{२स्पअ}{स्पअ+कोस्पअ} = \frac{२}{१+कोस्प^२अ} = \frac{२}{कोछे^२अ}$$

$$= \frac{२ज्याअ}{कोछेअ} = २ \frac{छे^२अ-१}{छे^२अ} = २ \frac{छेअ-कोज्याअ}{छेअ} ।$$

२१ । अस्मिन् प्रक्रमे निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं प्रदर्श्यते ।

(१) ४५अशानां ज्याकोटिज्यानयनम् । ∴ (२३) प्रक्रमस्यात्

(२) अस्मात् २ज्या^२अ = १-कोज्या^२अ

तथा २कोज्या^२अ = १+कोज्या^२अ एवं सिद्धम् ।

∴ यदि  $\alpha = 45^\circ$  तदा

$$2 \text{ ज्या } 45^\circ = 1 - \text{कोज्या } 90^\circ = 1 = 2 \text{ कोज्या } 45^\circ$$

$$\therefore \text{ज्या } 45^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \text{कोज्या } 45^\circ ।$$

अत्रणमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

( २ )  $30^\circ$  अंशानाम्  $60^\circ$  अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि  $\alpha = 30^\circ$  कल्प्येत तदा  $\text{ज्या } 2\alpha = \text{कोज्या } \alpha$ ,

$$\therefore \text{ज्या } 2\alpha = 2 \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha$$

$$\therefore 2 \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha = \text{कोज्या } \alpha$$

$$\therefore \text{ज्या } \alpha = \frac{1}{2} = \text{ज्या } 30^\circ = \text{कोज्या } 60^\circ ।$$

$$\text{कोज्या } 30^\circ = \sqrt{1 - \text{ज्या}^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{ज्या } 60^\circ ।$$

( ३ )  $12^\circ$  अंशानाम्  $48^\circ$  अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि  $\alpha = 12^\circ$  तदा  $\text{ज्या } 2\alpha = \text{कोज्या } 3\alpha$  ।

$$\therefore \text{ज्या } 2\alpha = 2 \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha,$$

$$( २३ \text{ प्र. } ) \text{कोज्या } 3\alpha = \text{कोज्या } \alpha - 4 \text{ ज्या}^3 \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha ।$$

$$\therefore 2 \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha = \text{कोज्या } \alpha - 4 \text{ ज्या}^3 \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha ।$$

$$\therefore 2 \text{ ज्या } \alpha = 1 - 4 \text{ ज्या}^3 \alpha \quad \therefore 4 \text{ ज्या}^3 \alpha + 2 \text{ ज्या } \alpha = 1$$

$$\therefore \text{वर्गसमीकरणविधिना ज्या } \alpha = \frac{\pm \sqrt{4-1}}{4}$$

अत्रापि ऋणमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

$$\therefore \text{ज्या } 12^\circ = \frac{\sqrt{4-1}}{4} = \text{कोज्या } 48^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \text{अत एव कोज्या } १८^{\circ} &= \sqrt{१ - ज्या^२ १८^{\circ}} = \sqrt{१ - \left(\frac{\sqrt{५-१}}{४}\right)^२} \\
 &= \sqrt{१ - \frac{६-२\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{१०+२\sqrt{५}}{१६}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}} = ज्या ७२^{\circ} ।
 \end{aligned}$$

( ४ ) ३६ अंशानाम् ५४ अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = १८^{\circ} तदा ज्या २ अ = २ ज्याअ . कोज्याअ,

$$\begin{aligned}
 \therefore ज्या ३६^{\circ} &= २ \left(\frac{\sqrt{५-१}}{४}\right) \left(\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४} = कोज्या ५४^{\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अत एव कोज्या } ३६^{\circ} &= \sqrt{१ - ज्या^२ ३६^{\circ}} = \sqrt{१ - \frac{१०-२\sqrt{५}}{१६}} \\
 &= \sqrt{\frac{६+२\sqrt{५}}{१६}} = \frac{\sqrt{५+१}}{४} = ज्या ५४^{\circ} ।
 \end{aligned}$$

( ५ ) ३० एषाम् १८ एषां चार्धसंज्याकोटिज्यानयनम् ।

तत्र ( २८ ) प्रक्रमोक्तमिदं समीकरणद्वयमुपयुज्यते ।

$$ज्याअ = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{१+ज्या २ अ} - \sqrt{१-ज्या २ अ} \right\}$$

$$कोज्याअ = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{१+ज्या २ अ} + \sqrt{१-ज्या २ अ} \right\}$$

अत्र यदि २अ = ३०^{\circ}, तदा ज्या २अ = \frac{१}{२}

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{२} \left[ \sqrt{१+\frac{३}{२}} - \sqrt{१-\frac{३}{२}} \right] = \frac{१}{२} \left[ \sqrt{\frac{५}{२}} - \sqrt{\frac{१}{२}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ७५^{\circ} \text{ ।}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{२} \left[ \sqrt{१+\frac{३}{२}} + \sqrt{१-\frac{३}{२}} \right] = \frac{१}{२} \left[ \sqrt{\frac{५}{२}} + \sqrt{\frac{१}{२}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}} = \text{ज्या } ७५^{\circ} \text{ ।}\end{aligned}$$

$$\text{एवमेव ज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}} - \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४} = \text{कोज्या } ८१^{\circ} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४} = \text{ज्या } ८१^{\circ} \text{ ।}$$

( ६ ) ३° अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् ।

अष्टादशानां १८ पञ्चदशानां १५ चांशानां ज्याकोटिज्ययोरव-  
गतयोस्त्रयाणामंशानां ज्याकोटिज्ये

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ३^{\circ} &= \text{ज्या } (१८^{\circ} - १५^{\circ}) \\ &= \text{ज्या } १८^{\circ} \times \text{कोज्या } १५^{\circ} - \text{कोज्या } १८^{\circ} \times \text{ज्या } १५^{\circ} \\ \text{कोज्या } ३^{\circ} &= \text{कोज्या } (१८^{\circ} - १५^{\circ}) \\ &= \text{कोज्या } १८^{\circ} \times \text{कोज्या } १५^{\circ} + \text{ज्या } १८^{\circ} \times \text{ज्या } १५^{\circ}\end{aligned}$$

अस्मात् सुखेन ज्ञायते ।

( ७ ) एवं त्रिपण्णवादिनवत्यन्तानामंशानां प्रत्येकं ज्याकोटिज्ये प्रसाध्य  
बालावबोधार्थं विलिख्यते ।

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ३^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५}-१) - \frac{\sqrt{३}-१}{८} \sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ८७^{\circ}\end{aligned}$$



$$\text{ज्या } ६^{\circ} = -\frac{१}{४}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} = \text{कोज्या } ८४$$

$$\text{ज्या } ९^{\circ} = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}} = \text{कोज्या } ८१^{\circ}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १२^{\circ} &= -\frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ७८^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}-१) \\ &= \text{कोज्या } ७५^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १८^{\circ} &= \frac{१}{४}(\sqrt{५}-१) \\ &= \text{कोज्या } ७२^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २१^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६९^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २४^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६६^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २७^{\circ} &= -\frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६३^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ३०^{\circ} &= \frac{१}{४} \\ &= \text{कोज्या } ६०^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ३३^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ५७^{\circ}\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ३६^{\circ} = \frac{१}{२\sqrt{२}} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५४^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ३९^{\circ} = \frac{\sqrt{३+१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५+१}) - \frac{\sqrt{३-१}}{८} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५१^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४२^{\circ} = -\frac{१}{४} (\sqrt{५} - १) = \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ४८^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४५^{\circ} = \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ४५^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४८^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{८} (\sqrt{५} - १) + \frac{१}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ४२^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५१^{\circ} = \frac{\sqrt{३-१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५+१}) + \frac{\sqrt{३+१}}{८} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ३९^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५४^{\circ} = \frac{१}{४} (\sqrt{५} + १) = \text{कोज्या } ३६^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५७^{\circ} = -\frac{\sqrt{३-१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५} - १) + \frac{\sqrt{३+१}}{८} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ३३^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ६०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२} = \text{कोज्या } ३०^{\circ} ।$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६३^{\circ} &= \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{३}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २७^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६६^{\circ} &= \frac{३}{४}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २४^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६९^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २१^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७२^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } १८^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७५^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}+१) \\ &= \text{कोज्या } १५^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७८^{\circ} &= \frac{३}{४}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } १२^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ८१^{\circ} &= \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{३}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ९^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ८४^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ८७^{\circ} = \frac{\sqrt{३-१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५-१}) + \frac{\sqrt{३+१}}{८} \sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{ज्या } ३^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ९०^{\circ} = १$$

$$= \text{ज्या } ०^{\circ} ।$$

३२ । अथ कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः \* ।

### तृतीयोऽध्यायः ३ ।

अत्र त्रिभुजचतुर्भुजयोर्वृत्तलानसमानजुवतुभुजक्षेत्रस्य वृत्तस्य च कतिचन गुणाः प्रदर्श्यन्ते ।

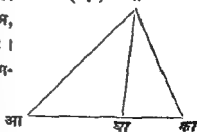
३४ । त्रिभुजे त्रयो भुजास्नावन्त एव कोणाश्चेति पदव-  
यवा भवन्तीत्युक्तं प्राक् ।

तत्र त्रयः कोणाः क्रमेण आ, का, गा, एभिर्घोत्याः स्युः ।  
तत्संमुखकोणाश्च क्रमेण अ, क, ग, एभिः ।

३५ । प्रतित्रिभुजं तत्तद्भुजाद् तत्तत्संमुखकोणज्या समा-  
नगुणा भवति ।

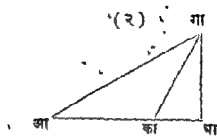
कल्प्यते आकागा-त्रिभुजस्य  
आ, का, गा, कोणाः । तथा अ,  
क, ग, क्रमेण तत्संमुखभुजाः ।  
गा-कोणात् आका-भुजे गा-कोण-  
विन्दोः गाघा-लम्बः कार्यः ।

( १ ) गा



$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}} ।$$

ॐ अस्य प्रक्रमस्य तथा ३३ प्रक्रमस्य च केवलं गणिते उपयोगाद्-  
ग्रन्थान्ते तद्वैशद्यं द्रष्टव्यम् ।



$$\text{ज्याका ज्यागाकाघा,} = (\text{द्वि. क्षे.}) = \frac{\text{गापा}}{\text{कागा}} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{अ}{क} \quad \therefore \text{ज्याआ} : \text{ज्याका} = अ : क$$

$$\text{यद्वा} \quad अ : ज्याआ = क : ज्याका \quad (2)$$

$$\text{साजाल्यात्} \quad अ : ज्याआ = ग : ज्यागा$$

$$क : ज्याका = ग : ज्यागा \quad (3)$$

३६। त्रिभुजे भुजयोगान्तरादितस्तत्संमुखकोणयोगान्तरार्धस्पर्शरेखादिसम्यन्यः प्रदर्श्यते ।

$$\therefore अ : क = ज्याआ : ज्याका$$

$$\begin{aligned} अ + क : अ - क &= ज्याआ + ज्याका : ज्याआ - ज्याका \\ &= २ ज्या\frac{१}{२} (आ + का) कोज्या\frac{१}{२} (आ - का) : २कोज्या\frac{१}{२} (आ + का) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times ज्या\frac{१}{२} (आ - का) &= \frac{ज्या\frac{१}{२} (आ + का)}{कोज्या\frac{१}{२} (आ + का)} : \frac{ज्या\frac{१}{२} (आ - का)}{कोज्या\frac{१}{२} (आ - का)} \\ &= स्पर्श\frac{१}{२} (आ + का) : स्पर्श\frac{१}{२} (आ - का) \end{aligned}$$

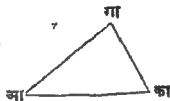
यदि भुजयोर्योगेन तयोरन्तरं लभ्यते तदा तत्संमुखकोणयोरे-  
क्यार्धस्य स्पर्शरेखा तयोरन्तरार्धस्य स्पर्शरेखा लभ्यत इत्यर्थः ।

३७ । त्रिभुजे भुजतत्संमुखकोणसम्बन्धतो ज्यास्पर्शरेखा-  
दिसम्बन्धः प्रदर्श्यते ।

यदि गा समकोण स्यात्

$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$



$$\text{स्पआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} । \quad \text{ज्याका} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याका} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} । \quad \text{स्पका} = \frac{\text{आगा}}{\text{कागा}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} ।$$

३८ । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणकोटिज्यानयनयुक्तिः प्रदर्श्यते  
( ३५ प्रक्रमस्मर्त्तुं द्विगुण्यम् )

यदा का कोणो लघुस्तदा	$\left\{ \begin{array}{l} \text{एते उन्मिती क्रमेण} \\ \text{क्षेत्रमितो द्वितीयाध्यायस्य} \\ \text{त्रयोदशद्वादशप्रतिशाभ्यां} \\ \text{संपद्येते ।} \end{array} \right.$
आगा <sup>२</sup> = आका <sup>२</sup> + कागा <sup>२</sup> - २आका . काघा	
यदा च का कोणोऽधिकस्तदा	
आगा <sup>२</sup> = आका <sup>२</sup> + कागा <sup>२</sup> + २आका . काघा	

तत्र यदा का कोणो लघुस्तदा,

$$\frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्याका} ।$$

काघा = कागा कोज्याका ।

यदा वा का कोणोऽधिकस्तदा

$$\therefore \frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्यागाकाघा} = - \text{कोज्याका}$$

$$\therefore \text{काघा} = - \text{कागा} \cdot \text{कोज्याका}$$

अत उत्थापनेन सिद्धमुभयत्रापि तुल्यमेव ।

$$\therefore क^2 = ग^2 + अ^2 - २अग \cdot \text{कोज्याका} ।$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२अग} ।$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याभा} = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग} ।$$

$$\text{एवमेव कोज्यागा} = \frac{अ^2 + क^2 - ग^2}{२अक} \text{ ७ ।}$$

३९ । त्रिभुजे भुजेभ्योऽधीष्टकोणज्यानयनपुक्तिप्रकारः ।

$$\text{अत्र ज्याभा} = १ - \text{कोज्याभा}$$

$$= (१ + \text{कोज्याभा})(१ - \text{कोज्याभा})$$

$$\text{परन्तु } १ + \text{कोज्याभा} = १ + \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग}$$

$$= \frac{२कग + क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग} = \frac{(क^2 + २कग + ग^2) - अ^2}{२कग}$$

$$= \frac{(क + ग)^2 - अ^2}{२कग} = \frac{(क + ग + अ)(क + ग - अ)}{२कग} ।$$

७ अनेन—

“भुजवर्गयुतिर्भूमिभर्गोना भुजपातहत् ।

दक्षिता त्रिभुजस्याग्रकोटिज्या भुजसंयुतौ ॥”

इति विशेषोक्तमप्युपपद्यते ।

$$\text{तथा } १ - \text{कोज्याआ} = १ - \frac{\text{क}^२ + \text{ग}^२ - \text{अ}^२}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{२\text{कग} - \text{क}^२ - \text{ग}^२ + \text{अ}^२}{२\text{कग}} = \frac{\text{अ}^२ - (\text{क}^२ - २\text{कग} + \text{ग}^२)}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{\text{अ}^२ - (\text{क} - \text{ग})^२}{२\text{कग}} = \frac{(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})(\text{अ} - \text{क} + \text{ग})}{२\text{कग}}$$

अथ यदि कल्प्येत २स = अ + क + ग

तदा २(स - अ) = अ + क + ग - २अ = क + ग - अ ।

२(स - क) = अ + क + ग - २क = अ + ग - क ।

२(स - ग) = अ + क + ग - २ग = अ + क - ग ।

$$\therefore १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२स \times २(स - अ)}{२\text{कग}} = \frac{२स(स - अ)}{२\text{कग}}$$

$$\text{तथा } १ - \text{कोज्याआ} = \frac{२(स - क) \times २(स - ग)}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{२(स - क)(स - ग)}{२\text{कग}} ।$$

$$\text{अत एव ज्या}^२\text{आ} = \frac{४}{\text{क}^२.\text{ग}^२} \text{स}(स - अ)(स - क)(स - ग) ।$$

$$\therefore \text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{क.ग}} \sqrt{\text{स}(स - अ)(स - क)(स - ग)}$$

अत्र मानस्य ऋणत्वं न संभवति त्रिभुजैककोणस्य समकोण-  
द्वयात्पत्वात् तज्ज्याया घनत्वात् ।



$$\text{साजात्यात् ज्याका} = \frac{२}{अग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

$$\text{ज्यागा} = \frac{२}{अक} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

४० । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणार्धज्याकोटिज्यास्पर्शरेखाणां मानं प्रदर्श्यते ।

$$\therefore \text{२ज्या}^२\text{आ} = १ - \text{कोज्याआ} = \frac{२(\text{स}-क)(\text{स}-ग)}{कग} ।$$

$$\therefore \text{ज्या}^२\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-क)(\text{स}-ग)}{कग}} ।$$

$$\therefore \text{२कोज्या}^२\text{आ} = १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२\text{स}(\text{स}-अ)}{कग} ।$$

$$\therefore \text{कोज्या}^२\text{आ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-अ)}{कग}} ।$$

$$\text{अत एव स्प}^२\text{आ} = \frac{\text{ज्या}^२\text{आ}}{\text{कोज्या}^२\text{आ}} = \sqrt{\frac{(\text{स}-क)(\text{स}-ग)}{\text{स}(\text{स}-अ)}} ।$$

अत्राप्युन्मितीनां धनत्वमेव बोध्यम् ।

$$\text{साजात्यात् ज्या}^२\text{का} = \sqrt{\frac{(\text{स}-अ)(\text{स}-ग)}{अग}} ।$$

$$\text{ज्या}^२\text{गा} = \sqrt{\frac{(\text{स}-अ)(\text{स}-क)}{अक}} ।$$

$$\text{कोज्याऽंका} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स} - \text{क})}{\text{अग}}} \quad \text{कोज्याऽंग} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स} - \text{ग})}{\text{अक}}}$$

$$\text{स्पऽंका} = \sqrt{\frac{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{ग})}{\text{स}(\text{स} - \text{क})}}$$

$$\text{स्पऽंग} = \sqrt{\frac{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})}{\text{स}(\text{स} - \text{ग})}}$$

४१ । त्रिभुजे भुजेभ्यः क्षेत्रफलानयनयुक्तिप्रकारः प्रदर्श्यते ।

यतो रेखागणितस्य द्वितीयाध्यायतो लम्बगुणं भूम्यर्धं खलु त्रिभुज-  
क्षेत्रफलं भवति ।

$$\therefore \text{आकाशा-त्रिभुजफलम्} = \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{गाघा}$$

$$= \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}} = \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ}$$

$$= \frac{\text{कग}}{2} \cdot \frac{2}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}$$

$$= \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}$$

अत एवार्थभटः—

“सर्वभुजैवयं दलितं चतुःस्थितं बाहुभिः क्रयाद्रहितम् ।

तद्भातपदं त्रिभुजे क्षेत्रे स्पष्टं फलं भवति ॥”

४२ । (अनु० १)  $\therefore$  त्रिभुजफलम्

$= \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ}$ , इति पूर्वप्रक्रमे सिद्धम् ।

∴ त्रिभुजे भुजयोर्धार्तार्ध भुजान्तर्गतकोणज्यया गुणितं क्षेत्रफलं भवतीत्यवगम्यते ।

४३ । (अनु० २) त्रिभुजे पूर्वोक्तप्रक्रमैर्लम्बावाभावगमः सुगमः ।

$$\therefore \text{कोज्याआ} = \left( \frac{\text{आघा}}{क} \right) = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग}$$

$$\therefore \text{आघा} = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२ग} ।$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \pm \left( \frac{\text{काघा}}{अ} \right) = \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२अग}$$

$$\therefore \text{काघा} = \pm \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२ग} ।$$

अत्र लम्बो यथा त्रिभुजस्थान्तर्बहिर्वा निपठेत् तदनुसारेण द्वितीयावाघाया धनर्णत्वं बोध्यम् ।

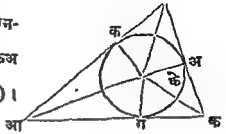
$$\therefore \text{ज्याआ} = \left( \frac{\text{गाघा}}{क} \right) = \frac{२}{कग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

$$\therefore \text{गाघा} = \frac{२}{ग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

४४ । त्रिभुजस्य भुजेभ्यस्तदन्तर्बहिर्लङ्घनयोर्द्वितीयोऽप्यासा-  
र्धानयनं मददर्यते ।

( १ ) तत्रादौ त्रिभुजान्तर्लम्बवृत्तव्यासार्धानयनम् । गा

यदि आकागा-त्रिभुजान्तर्लम्ब-  
वृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत तदा केअ  
' = केक = केग = व्यासार्ध = ( व ) ।



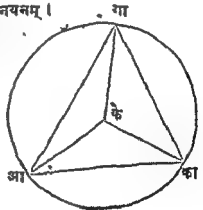
अथ ' : क =  $\triangle$  आकेका +  $\triangle$  काकेगा +  $\triangle$  आकेगा

$$= \frac{1}{2} ग.व + \frac{1}{2} अ.व + \frac{1}{2} क.व = \frac{अ + क + ग}{2} व = स.व ।$$

$$\therefore व = \frac{क}{स} = \frac{\sqrt{स(स-अ)(स-क)(स-ग)}}{स} ।$$

( २ ) त्रिभुजबहिर्लम्बवृत्तव्यासार्धानयनम् । गा

यदि आकागा-त्रिभुजब-  
हिर्लम्बवृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत  
तदा केआ = केका = केगा = व्या-  
सार्ध = ( वा ) । अथ समानभूमौ  
यत्समानयोः केन्द्रपरिधिर्लम्बयोः  
कोणयोरार्योऽन्यतो द्विगुणो भ-  
वत्यतः ( ४२ प्रक्रमतः )



$$क = \frac{1}{2} अ.क . ज्या \frac{1}{2} आकेका ल ।$$

ॐ अनेन—

“भुजमध्यगता जीवा क्षुण्णा दोष्णोर्ध्वेन सा ।  
दक्षिणा त्रिभुजस्य ग्यात् फलं वाऽन्यप्रकारतः ॥”  
इति विनोदोत्तमपुष्पघट्टे ।

$$\text{परन्तु ज्या } \frac{1}{2} \text{ आकेका} = \frac{\frac{1}{2} \text{ आका}}{\text{आके}} = \frac{ग}{२वा} ।$$

$$\therefore फ = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} \therefore वा = \frac{\text{अ.क.ग}}{४फ}$$

$$= \frac{\text{अ.क.ग}}{४ \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते-त्रिभुजे कोणस्य ज्या तत्कोणसंमुखभुजात् त्रिभुजबहिर्लेग्नवृत्तव्यासाप्तेन तुल्या भवतीति ।

४५ । (अनुमा० १) यदि आकाशा त्रिभुजे मा-कोणात् आका-भूमौ लम्बः (ल) क्रियते तदा  $फ = \frac{1}{2} ग.ल$  ।

$$\text{अथ पूर्वप्रक्रमतः सिद्धम् } फ = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} ।$$

$$\therefore \frac{1}{2} ग.ल = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} \therefore वा = \frac{\text{अ.क.ग}}{२ल}$$

अत एव सिद्धान्तविषयकक्रोडग्रन्थे मयोक्तम् ।

“त्रियाहुकयहिलेप्रवृत्तव्यासदलं किल ।

भुजयोराहतेः खण्डालुम्बाप्तेन समं भवेत्”-इति ।

४६ । (अनु० २) ।

$$\therefore फ = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}}{२} वा = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} \therefore २वाव = \frac{\text{अ.क.ग}}{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते-त्रिभुजे त्रयाणां भुजानां यथात् तस्योणेनात्र त्रिभुजान्तर्बाहिलेप्रवृत्तव्यासाधयोर्ध्वेन द्विगुणेन तुल्यं भवतीति ।

४७ । अथ वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजस्य भुजेभ्यस्तत्कोणकर्ण-  
फलादीनामानयनम् ।

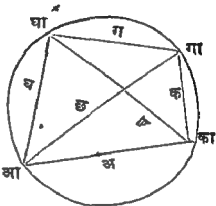
कल्प्यते आका = अ, कागा = क, गाघा = ग, घाआ = घ,  
काघा = च, आगा = छ ।

( १ ) अतः ( ३८ प्रक्रमतः )

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{२\text{अघ}}$$

$$\text{कोज्यागा} = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{२\text{कग}} ।$$

$$\therefore \text{च}^2 = \text{अ}^2 + \text{घ}^2 - २\text{अघ.कोज्याआ} \quad \text{आ} \\ = \text{क}^2 + \text{ग}^2 - २\text{कग.कोज्यागा}$$



परन्तु क्षेत्रमितेस्तृतीय।ध्यायस्यैकविंशप्रतिक्षया

$$\text{कोज्याआ} = \text{कोज्या} ( १८०^\circ - \text{गा} ) = - \text{कोज्यागा}$$

$$\therefore \text{आ}^2 + \text{घ}^2 - २\text{अघ} . \text{कोज्याआ} = \text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग} . \text{कोज्याआ},$$

$$\therefore \text{कोज्याआ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{क}^2 - \text{ग}^2}{२(\text{अघ} + \text{कग})} = - \text{कोज्यागा}$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याका} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2 - \text{घ}^2}{२(\text{अक} + \text{गघ})} = - \text{कोज्याघा} ।$$

( २ ) अतः ३९ प्रक्रमोक्तयुक्त्या—

$$\text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{अघ} + \text{कग}} \sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})(\text{स}-\text{घ})}$$

$$(\text{अत्र स} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग} + \text{घ}}{२} \text{इति बोध्यम्})$$

(३) ४० प्रक्रमोक्तयुक्ता

$$\text{ज्याऽङ्गा} = \sqrt{\frac{(\text{स-अ})(\text{स-घ})}{\text{अघ+कग}}} = \text{कोज्याऽङ्गा}$$

$$\text{कोज्याऽङ्गा} = \sqrt{\frac{(\text{स-क})(\text{स-ग})}{\text{अघ+कग}}} = \text{ज्याऽङ्गा}$$

$$\text{स्पष्टाङ्गा} = \sqrt{\frac{(\text{स-अ})(\text{स-घ})}{(\text{स-क})(\text{स-ग})}} = \text{कोस्पष्टाङ्गा}$$

$$(४) \therefore \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{२\text{अघ}} = - \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{२\text{कग}}$$

$$\therefore \text{च}^2 = \frac{(\text{अग+कघ})(\text{अक+गघ})}{\text{अघ+कग}}$$

$$\text{साजात्यात् छ}^2 = \frac{(\text{अग+कघ})(\text{अघ+कग})}{\text{अक+गघ}}$$

एतेन,

“कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यभाजितं गुणयेत् ।

योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णां पदे विपमे ॥”

इति भेदागुमोक्तं वृत्तान्तर्गतविषमचतुर्भुजपरमित्यवगम्यते ।

$$(५) \text{ अत एव च छ}^2 = \text{अग} + \text{कघ}, \text{ तथा } \frac{\text{च}}{\text{छ}} = \frac{\text{अक} + \text{गघ}}{\text{अघ} + \text{कग}}$$

अतो मत्कृतमोहमन्ये—

“वृत्तान्तःस्थचतुर्धाहुक्षेत्रे श्रवणयोर्हतिः ।

भुजप्रतिभुजाहत्योः समासेन समा भवेत् ॥”

$$\begin{aligned} (६) (आकाशा) चतुर्भुजफलम् &= \triangle आकाशा + \triangle काशा \\ &= \frac{१}{२} अघ . ज्याआ + \frac{१}{२} कग . ज्याआ = \frac{१}{२} (अघ + कग) ज्याआ \\ &= \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)} \end{aligned}$$

अतः श्रीपति —

“भुजसमासदलं हि चतुःस्थितं निजभुजैः क्रमशः पृथगूनितम् ।  
अथ परस्परमेव समाहतं कृतिपदं त्रिचतुर्भुजयोः फलम् ॥”

(७) यदि (आकाशा) त्रिभुजलघुवृत्तस्य व्यासार्धं (वा) कल्प्येत

$$\text{सदा (४४ प्रक्रमत) वा} = \frac{\text{अघच}}{४ \triangle आकाशा}$$

$$\text{परन्तु } \triangle आकाशा = \frac{१}{२} \text{ अघ ज्याआ}$$

$$\therefore \text{वा} = \frac{\text{अघच}}{२\text{अघ ज्याआ}} = \frac{\text{च}}{२\text{ज्याआ}} = \frac{\text{च}}{२\text{ज्याआ}} ।$$

$$\therefore \text{वा} = \frac{\text{छ}}{२\text{ज्याआ}} = \frac{\text{छ}}{२\text{ज्याआ}} ।$$

$$\text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{अघ + कग}} \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{वा} &= \frac{\text{च}}{२\text{ज्याआ}} = \frac{\text{च (अघ + कग)}}{४ \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}} \\ &= \frac{१}{२} \sqrt{\frac{(\text{अक + गघ})(\text{अग + कघ})(\text{अघ + कग})}{(\text{स-अ})(स-क)(स-ग)(स-घ)}} \end{aligned}$$

अस्मादिदमवगम्यते विषमचतुर्भुजमात्रं वृत्तान्तं कर्तुं शक्यते ।  
अथ च भुजानां क्रमव्यत्यासेऽपि न क्षेत्रफले विकारं विन्दु कोणा-



दिष्टेव । अत्र यदि  $\phi = 0$  कल्प्येत तदा कोणादीनां मानानि पूर्वसा-  
धितैस्त्रिभुजकोणादीनां मानैरभिन्नानि संपद्यन्ते ।

४८ । विषमचतुर्भुजमात्रस्यान्योन्यसंमुखकोणद्वयविशि-  
ष्टेभ्यो भुजेभ्यः फलानयनम् ।

अत्र पूर्वप्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम् ।

तत्र यदि क्षेत्रफलद्योतकं ( फ ) कल्प्येत तदा

$$फ = \frac{1}{2} ( अघ . ज्याआ + कग . ज्यागा )$$

$$परन्तु कोज्याआ = \frac{अ^2 + घ^2 - च^2}{२अघ}, कोज्यागा = \frac{क^2 + ग^2 - च^2}{२कग}$$

$$\therefore १ + कोज्याआ = \frac{(अ + घ)^2 - च^2}{२अघ} \quad (१)$$

$$१ - कोज्याआ = \frac{च^2 - (अ - घ)^2}{२अघ} \quad (२)$$

$$१ + कोज्यागा = \frac{(क + ग)^2 - च^2}{२कग} \quad (३)$$

$$१ - कोज्यागा = \frac{च^2 - (क - ग)^2}{२कग} \quad (४)$$

ततः (१) (४) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

$$(अ + घ)^2 - (क - ग)^2 = २अघ (१ + कोज्याआ) + २कग (१ - कोज्यागा)$$

$$वा (अ - क)(अ - ग) = अघ . \frac{१ + कोज्याआ}{२} + कग . \frac{१ - कोज्यागा}{२}$$

$$= \text{अघ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} + \text{कोज्या}^2 \text{गा} \quad (५)$$

एवमेव (२) (३) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

$$(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{घ}) = \text{अघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} + \text{कग} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा} \quad (६)$$

एवम् (५) (६) अनयोर्गुणनात्

$$(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ})$$

$$\begin{aligned} &= \text{अ}^2 \text{घ}^2 \cdot \text{ज्या}^4 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^4 \text{आ} + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा} \\ &+ \text{क}^2 \text{ग}^2 \cdot \text{ज्या}^4 \text{गा} \cdot \text{कोज्या}^4 \text{गा} + \text{अकगघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा} \dagger \\ &= (\text{अघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} + \text{कग} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा})^2 \\ &+ \text{अकगघ} (\text{कोज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा} - \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा})^2, \\ &= ४(\text{अघ} \cdot \dagger \text{ज्या}^2 \text{आ} + \text{कग} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा})^2 + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 (\text{आ} + \text{गा}) \\ &= \text{फ}^2 + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 (\text{आ} + \text{गा}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{फ} = \sqrt{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ}) - \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 (\text{आ} + \text{गा})}$$

$$\text{अथ} \therefore \text{आ} + \text{फा} + \text{गा} + \text{घा} = ३६०^\circ \therefore \dfrac{३}{४} (\text{आ} + \text{गा}) = १८०^\circ - \dfrac{३}{४} (\text{फा} + \text{घा})$$

$$\text{अत्र} \quad \frac{१ + \text{कोज्या}^2 \text{आ}}{२} = \text{कोज्या}^2 \text{आ}, \text{ एतदर्थं (२४) प्रक्रमो द्रष्टव्यः ।}$$

† अत्र २अकगघ . ज्या<sup>२</sup>आ . कोज्या<sup>२</sup>आ . ज्या<sup>२</sup>गा . कोज्या<sup>२</sup>गा  
एतत्तुल्यं धनमृणं च क्रियते तथाऽप्यविकार एव ।

‡ २ज्या<sup>२</sup>आ . कोज्या<sup>२</sup>आ = २ज्या<sup>२</sup>२आ । अत्र २आ - स्थाने (ज्ञा)  
अनेनोत्थाप्यते तदा २ज्या<sup>२</sup>आ . कोज्या<sup>२</sup>आ = ज्या<sup>२</sup>आ ।

$$\therefore \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} = \frac{\text{ज्या}^4 \text{आ}}{२}$$

$$\therefore \text{अघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} = \frac{\text{अघ} \cdot \text{ज्या}^4 \text{आ}}{२} \text{ इतोऽमे स्पष्टम् ।}$$

∴ कोज्या<sup>२</sup> $\frac{१}{२}$  (आ + गा) = कोज्या<sup>२</sup> $\frac{१}{२}$  (का + घा) । अत इदं फलं समुखकोणद्वययोरन्यतरेण विशिष्टेभ्यश्चतुर्भ्यो भुजेभ्यः सम्पन्नम् ।

$$\text{तत्र यदि आ + गा = का + घा = } १८०^{\circ}$$

$$\text{तदा कोज्या<sup>२</sup> $\frac{१}{२}$  (आ + गा) = कोज्या<sup>२</sup> $\frac{१}{२}$  ( का + घा ) = ०}$$

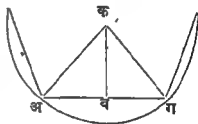
$$\text{अतोऽत्र फ} = \sqrt{(स - अ)(स - क)(स - ग)(स - घ)}$$

पूर्वसाधितेन वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजमानेनाभिन्नं जातम् ।

अत एव विषमचतुर्भुजस्यानेकविधेषु फलेषु वृत्तान्तर्गतस्य तस्य फलं महत्तमं भवति । इदमेव पूर्वाचार्यैः सप्रन्येषु साधितम् ।

४९ । वृत्तान्तर्गतस्य समानर्जुबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफल-  
योरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल (क) वृत्तकेन्द्रं स्यात्  
तदन्तर्गतस्य समानर्जु - (न) सं-  
ख्याकभुजक्षेत्रस्य भुजः = अग,  
( व ) = वृत्तस्य व्यासार्धं  
स्यात् तदा कअ, कग रेखे  
संयोज्य अग-रेखोपरि कव लम्बः  
कार्यः ।



$$\text{अत्र } \angle \text{अकग} = \frac{३६०^{\circ}}{न}$$

$$\text{बहुभुजक्षेत्रपरिधिश्च} = न . अग = २न . अव$$

$$= २न . अक . ज्या \angle \text{अकव} = २न . व . ज्या \frac{१८०^{\circ}}{न}$$

$$\text{एवं बहुभुजक्षेत्रफलम्} = n \cdot \text{अकगक्षेत्रम्} = n \cdot \frac{\text{अग} \cdot \text{कय}}{2}$$

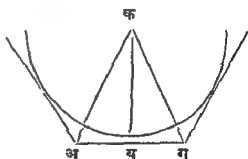
$$= n \cdot \text{अक} \cdot \text{ज्याअकय} \times \text{अक} \cdot \text{कोज्या} \angle \text{अकय}$$

$$= n \cdot \text{अक}^2 \cdot \text{ज्या} \frac{180^\circ}{n} \cdot \text{कोज्या} \frac{180^\circ}{n} \quad ,$$

अस्मादिदमवगम्यते तेषां समानजुवहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्क्षेत्रबहिर्लङ्गनवृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति । तत्क्षेत्रफलं च तत्क्षेत्रबहिर्लङ्गनवृत्तव्यासार्ध-वर्गात् समानगुणं भवतीति ।

५० । वृत्तबहिर्लङ्गस्य ऋजुसमवहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफल-योरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल वृत्त बहि-  
र्लङ्गन( न ) संख्याऋजुमु-  
जक्षेत्रस्य अग-भुजः व-  
स्थाने परिधौ लङ्गनः ।



$$\text{बहिर्लङ्गनवहुभुजक्षेत्रपरिधिः} = n \cdot \text{अग} = 2n \cdot \text{अय}$$

$$= 2n \cdot \text{कय} \cdot \text{स्पअकय} = 2n \cdot \text{अय} \cdot \text{स्प} \frac{180^\circ}{n}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफलम्} = n \cdot \text{अगक्षेत्रफलम्}$$

$$= n \times \frac{\text{अग} \cdot \text{कय}}{2} = n \cdot \text{कय} \cdot \text{स्प} \angle \text{अकय} \times \text{कय}$$

$$= n \cdot \text{अय}^2 \cdot \text{स्प} \frac{180^\circ}{n}$$

अस्मादिदमवगम्यते येषां समानर्जुवहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या  
समाना भवेत् तेषु तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्क्षेत्रान्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धात्  
समानगुणो भवति तत्क्षेत्रफलं च तत्तदन्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धवर्गात्  
तुल्यगुणं ॥ भवतीति ।

५१ । (ब)-व्यासार्धविशिष्टस्य वृत्तस्यान्तर्वहिश्च लघ्नयोः  
समानर्जु-(न)संख्याकभुजक्षेत्रयोः क्रमेण परिधी किल  
(प) (पा) इति स्यातां फले च (फ) (फा) इति स्याताम् ।

$$\text{तदा } \frac{प}{पा} = \frac{\text{नव. ज्या } \frac{१८०^\circ}{न}}{\text{नव. स्प } \frac{१८०^\circ}{न}} = \text{कोज्या } \frac{१८०^\circ}{न}$$

$$\text{तथा } \frac{फ}{फा} = \frac{\text{नव}^२ \cdot \text{ज्या } \frac{१८०^\circ}{न} \cdot \text{कोज्या } \frac{१८०^\circ}{न}}{\text{नव}^२ \cdot \text{स्प } \frac{१८०^\circ}{न}} = \text{कोज्या}^२ \frac{१८०^\circ}{न}$$

अत्र यदि  $न = \infty$  स्यात्

$$\text{तदा } \frac{प}{पा} = \text{कोज्या } \frac{१८०^\circ}{\infty} = \text{कोज्या } ०^\circ = १$$

$$\text{तथा } \frac{फ}{फा} = \text{कोज्या}^२ \frac{१८०^\circ}{\infty} = \text{कोज्या}^२ ०^\circ = १$$

∴  $प = पा$  तथा  $फ = फा$  भवेत् ।

॥ इदमेव क्षेत्रमितेर्द्वादशाध्यायस्य १-२ प्रतिज्ञाभ्यामपि सम्पद्यते ।

अत एव वृत्तान्तर्बहिर्लग्नबहुभुजक्षेत्रयोर्भुजसंख्या यथायथाऽधिका स्यात् तथातथा ते क्षेत्रे प्रत्येकं तद्वृत्तक्षेत्रासन्ने भवेताम् । तथा च भुज-संख्याया आनन्त्ये ते वृत्तक्षेत्रे भूत्वा सर्वाशैर्मियो मिलेताम् । अत एव तत्तद्वृत्तपरिधिस्तत्तद्वृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति तत्तद्वृत्तफलं च तत्तद्वृत्तव्यासार्धवर्गात् समानगुणं भवतीत्यवगम्यते ।

५२ । अध वृत्तक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयनयुक्तिप्रकारः ।

(१) तत्र किल वृत्तान्तर्गतबहुभुजक्षेत्रपरिधिः = २नव, ज्या  $\frac{१८०^{\circ}}{न}$  ।

अत्र यथायथा न-संख्याऽधिका स्यात् तथातथाऽयं परिधिवृत्त-परिधेरासन्नतरो भवेदित्यत एव पूर्वम् (ज्या  $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ ) अस्य तथा मानं

साध्यते यथाऽत्र न-संख्या महती स्यात् ।

तथा हि : ( २४ ) प्रक्रमस्थात् ( फा ) तः

$$\text{कोज्या } \frac{\text{आ}}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}} \sqrt{१ + \text{कोज्याआ}} \quad \text{॥}$$

$$\therefore \text{कोज्या } \frac{९०^{\circ}}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{एवम् कोज्या } \frac{९०^{\circ}}{२^n} = \frac{१}{\sqrt{२}} \sqrt{१ + \frac{१}{\sqrt{२}}}$$

॥ अत्र यदि आ =  $९०^{\circ}, \frac{९०^{\circ}}{२}, \frac{९०^{\circ}}{२^२}$  इत्यादि कल्प्यते तदाऽधः-

स्थितस्वरूपाणि जायन्ते ।



अथ वृत्तरूपे बहुभुजक्षेत्रे  $n = \infty$  । अत एव कोज्या  $\frac{180^\circ}{n}$

$$= \text{कोज्या } 0^\circ = 1 ।$$

$$\therefore \text{वृत्ते } \frac{फ}{व} = \frac{१}{१} व. \therefore फ = १ व. प ।$$

अथ च पूर्वासेद्धम्  $प = २\pi व$

$$\therefore फ = \pi व^२ ।$$

(३) एवम् अकव-वृत्तरण्ड-  
स्यापि फलं शीघ्रमवगम्यते ।

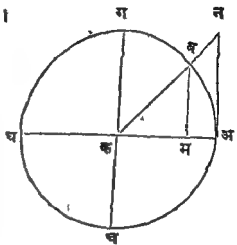
( 'पार्श्वस्थं क्षेत्रं द्रष्टव्यम् )

तथा हि-अत्र किल अब-चाप-

दैर्घ्यम् = अ । व्यासार्धम् = व,

तथा च क्षेत्रमितेः पष्ठाध्यायस्य

त्रयविंशप्रतिज्ञया-



$$\text{अकव-वृत्तरण्डम्} : \text{अगधच } \odot :: \text{अ} : २\pi व$$

$$\therefore \text{अकव-वृत्तरण्डम्} = \frac{\text{अ}}{२\pi व} \times \text{अगधच } \odot$$

$$= \frac{\text{अ}}{२\pi व} \times \pi व^२ = \frac{१}{२} \text{अव} ।$$

( ४ ) अब-चापस्य घम-जीवा, अन-स्पर्शरेखा स्यात् । तत्र यदि अय-रेखा क्रियते तदा अकव-वृत्तरण्डम्, अकव-त्रिभुजादधिकम् अकन-त्रिभुजाद्योनं भवेत् ।

$$\therefore \frac{१}{२} \text{अक. चाप} > \frac{१}{२} \text{अक. घम} < \frac{१}{२} \text{अक. अन}$$

$$\therefore \text{अय} > \text{घम} < \text{अन} ।$$



अतः अक्ष-लघुकोणसंमुखचापम् अव-स्वज्यातोऽधिकं स्वस्पर्शरेखा-  
तश्च न्यूनं भवति तदेव विलिख्य प्रदर्श्यते

$$अ > ज्याअ < स्पअ ।$$

तत्र यदि अ = ९० स्यात् तर्हि

$$\frac{ज्याअ}{स्पअ} = \frac{कोज्याअ}{व} = \frac{कोज्या०^{\circ}}{व} = \frac{व}{व} = १$$

अस्मादिदमनुमीयते । चापस्यात्यन्तह्रासे तज्यास्पर्शरेखे मिथ-  
स्तुत्ये भवतः । अत एव ते प्रत्येकं स्वचापेन समे स्याताम् ।

$$तथा \frac{ज्याअ}{अ} = \frac{स्पअ}{अ} = १, एवं सिध्यति ।$$

५३ । रूपव्यासार्धे चापस्य या जीवादयस्ता एव तच्चा-  
पसम्बन्धिकोणस्यापि भवन्तीति पूर्वं प्रदर्शितम् । (१४ प्र. द्रं.)  
तत्र यच्चापदैर्घ्यमानं तदेव तत्सम्बन्धिकोणस्य स्यात् तच्च  
तस्य कोणस्य चापीयं मानमुच्यते । बीजक्रियया सम्पाद्यमाने  
त्रिकोणमितिगणिते कोणस्य चापीयमानमेव गृह्यते ।

अथ यदि ( व ) व्यासार्धे ( २०व ) अयं पूर्वसिद्धः परिधिस्तदा  
रूपव्यासार्धे क इत्यनुपातेनाप्तं ( २० ) रूपव्यासार्धे परिधिदैर्घ्यम् ।

अतः २० = ३. १४१५९२६५ इत्यादिकं रूपव्यासार्धेऽर्धपरिधि-  
मानं समकोणद्वयस्य चापीयं मानं स्यात् ।

तथा च यस्य कोणस्य चापीयं मानं रूपं स्यात् तस्य

$$\frac{१८०^{\circ}}{३. १४१५९२६५} = ५७.२९५७ इ० = ५७^{\circ} । १७' । ४४'' . ६ इत्या-$$

द्यंशादिमानं भवेत् । अस्मान्निर्दिष्टकोणस्यांशादिमानाच्च तत्कोणसंब-  
न्धिचापदैर्घ्यावगमः सुगमः । ।

अथ

## परीक्षार्थिजनोपकारार्थं

( २९ ) प्रक्रमोक्तप्रश्नानामुत्तराणि ।

$$(१) \text{ ज्याञ}^२ = १ - \text{कोज्या}^२\text{ञ} \therefore \text{ज्याञ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{ञ}}$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \cdot \text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \text{कोज्याञ} \cdot \text{स्पञ} ।$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \times \frac{१}{\text{कोज्याञ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याञ}}} = \frac{\text{ज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\text{स्पञ}}{\text{छेञ}} = \frac{\text{स्पञ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{ञ}}}$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \times \text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\text{कोज्याञ}}{\frac{१}{\text{कोस्प}}}$$

$$\begin{aligned} \text{ज्याञ} &= \frac{\text{ज्याञ} \times \frac{१}{\text{ज्याञ}}}{\frac{१}{\text{ज्याञ}}} = \frac{१}{\frac{१}{\text{ज्याञ}}} = \frac{१}{\text{कोछेञ}} \\ &= \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{ञ}}} \end{aligned}$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \times \text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्याञ}} \times \text{कोज्याञ}}{\frac{१}{\text{ज्याञ}}} = \frac{\text{छेञ} \times \text{कोज्याञ}}{\text{कोछेञ}}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{1}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\sqrt{\text{छेअ}^2 - 1}}{\text{छेअ}}$$

$$(२) \text{ कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \frac{1}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{1}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{1}{\text{छेअ}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{स्पअ}^2}}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{1}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्याअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ} ।$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्याअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} \\ &= \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}} ।\end{aligned}$$

$$(३) \text{ स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}} ।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}} ।$$

$$\begin{aligned} \text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\frac{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} \end{aligned}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned} \text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \\ &= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ}} \quad | \quad १ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^2 \text{अ}}}{१ - \text{उअ}} = \frac{\sqrt{१ - (१ - \text{उअ})^2}}{१ - \text{उअ}} \\ &= \frac{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उअ}^2}}{१ - \text{उअ}} \quad | \end{aligned}$$

(४) कोस्पअ =  $\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$  । इतोऽग्रे पूर्वोक्तस्पर्शरेखास्वरूपे बहुधा हर-

भाज्ययोः परिवर्तनादेव सर्वमुपपद्यते ।

$$(५) \text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \sqrt{१ + \text{स्प}^2 \text{अ}} \quad |$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned}\text{छेज} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} \times \text{ज्याअ}} \\ &= \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेज}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\begin{aligned}\text{छेज} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} \\ &= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{छेज} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेज}}{\text{कोज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्याअ}^२}} ।$$

$$\text{छेज} = \frac{\text{कोछेज}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्पअ}^२}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{छेज} = \frac{\text{कोछेज}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेज}}{\sqrt{\text{कोछेज}^२ - १}} ।$$

$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोज्याज}} = \frac{\text{ज्याज} \times १}{\text{कोज्याज} \times \text{ज्याज}} = \text{स्पज} \times \text{कोछेज} ।$$

$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोज्याज}} = \frac{१}{१ - \text{उज}} ।$$

$$(६) \text{कोछेज} = \frac{१}{\text{उज्याज}} = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{ज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{ज्याज}} = \frac{\text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्याज}} = \frac{\text{छेज}}{\text{स्पज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{ज्याज}} = \frac{\text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}} = \frac{\text{कोस्पज}}{\text{कोज्याज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{ज्याज}} = \frac{\text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}} = \frac{१}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्याज} \times \text{स्पज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{उज्याज}} = \frac{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}$$

$$= \frac{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}{\text{कोज्याज} \times \text{ज्याज}} = \frac{\text{स्पज} \times \text{कोस्पज}}{\text{ज्याज}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{छेअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}}{\text{स्पअ}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्पअ} \times \text{छेअ} ।$$

$$\begin{aligned} \text{कोछेअ} &= \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\sqrt{१ - (१ - \text{उअ})^२}} \\ &= \frac{१}{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उ}^२\text{अ}}} । \end{aligned}$$

$$(७) \text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} ।$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}} ।$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{१}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} ।$$



$$\text{सभ} = १ - \text{कोज्याभ} = १ - \frac{\text{ज्याभ} \times \text{कोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

$$= १ - \frac{१}{१} \times \frac{\text{कोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

$$= १ - \frac{१ \times \text{कोस्पभ}}{\text{कोछेभ}} = १ - \frac{\text{कोस्पभ}}{\text{कोछेभ}}$$

$$= १ - \frac{\text{कोस्पभ}}{\sqrt{१ - \text{कोस्प}^2\text{भ}}}$$

$$\text{सभ} = १ - \frac{\text{कोस्पभ}}{\text{कोछेभ}} = १ - \frac{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{भ} - १}}{\text{कोछेभ}}$$

अथ

(३०) प्रक्रमोक्तद्विगुणकोणस्य ज्यादिस्वरूपाणां वैशद्यम् ।

$$(१) \text{ज्या} २\text{अ} = २\text{ज्याभ} \cdot \text{कोज्याभ} = \frac{२\text{ज्याभ} \cdot \text{ज्याभ} \cdot \text{कोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

$$= \frac{२\text{ज्या}^2\text{भ}}{\text{ज्याभ}} = \frac{२\text{ज्या}^2\text{भ}}{\text{स्पभ}}$$

कोज्याभ

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रकोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{रकोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रज्याअ}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{रज्याअ}}{\text{छेअ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रकोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{रकोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{छे}^2\text{अ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{छे}^2\text{अ}} = \frac{\text{रस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{र}}{\frac{१}{\text{ज्याअ कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{2}{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{2}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{2}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} \quad |$$

$$\text{ज्यारअ} = 2\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{2\text{ज्याअ.ज्याअ.कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{2\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \frac{1}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{2\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^2\text{अ}} \quad |$$

$$\text{ज्यारअ} = \frac{2\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^2\text{अ}} = \frac{2\text{कोस्पअ}}{1 + \text{कोस्प}^2\text{अ}} \quad |$$

$$(2) \text{ कोज्यारअ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = 1 - \text{ज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} \\ = 1 - 2\text{ज्या}^2\text{अ} \quad |$$

$$\text{कोज्यारअ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - (1 - \text{कोज्या}^2\text{अ}) \\ = \text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 + \text{कोज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 \quad |$$

$$\text{कोस्वारअ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{1 - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1}$$

$$= \frac{1 - \text{स्प}^2\text{अ}}{\text{छे}^2\text{अ}} = \frac{1 - \text{स्प}^2\text{अ}}{1 + \text{स्प}^2\text{अ}} \quad |$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{1} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} \cdot \text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - \text{स्प}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} \cdot \text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} \cdot \text{ज्या}^2\text{अ}}} \\ &= \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - \text{स्प}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}} \end{aligned}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 1}{1} = \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 1}{\text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} + 1}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1$$

$$= \frac{2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} = 2 - \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{2 - \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1} = \frac{2 - \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 = \frac{2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1}{1} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{1}$$

$$\frac{2\cos A - \frac{1}{\cos A}}{1} = \frac{2\cos A - \csc A}{\csc A}$$

$$\cos 2A = \cos A - \frac{1 - 2\sin^2 A}{\sin A} = \frac{1 - 2\sin^2 A}{\sin A}$$

$$= \frac{\csc A - 2}{\csc A}$$

$$\cos 2A = 2\cos A - 1 = \frac{2\cos A - 1}{1} = \frac{2\cos A - 1}{\cos A}$$

$$\frac{2\cos A - \frac{1}{\cos A}}{1} = \frac{2\cos A - \csc A}{\csc A}$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1 - 2\sin^2 A}{1} = \frac{1 - 2\sin^2 A}{\sin A}$$

$$= \frac{\csc A - 2}{\csc A}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या२अ} &= १ - २ज्या^२अ = \frac{१ - २ज्या^२अ}{१} \\ &= \frac{\text{कोछेअ} - २ज्याअ}{\text{कोछेअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (३) \text{ स्प२अ} &= \frac{\text{ज्या२अ}}{\text{कोज्या२अ}} = \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} \\ &= \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ}{१ - \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \\ &= \frac{२स्पअ}{१ - स्प^२अ} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२}{\frac{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ}{ज्याअ . \text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{२}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{१ - २ज्या^२अ} \quad |$$

$$\frac{2\text{कोज्याअ} - \frac{1}{\text{कोज्याअ}}}{1} = \frac{2\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = 1 - 2\text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{1 - 2\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^2\text{अ} - 2}{\text{कोछे}^2\text{अ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 = \frac{2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1}{1} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$\frac{2\text{कोज्याअ} - \frac{1}{\text{कोज्याअ}}}{1} = \frac{2\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = 1 - 2\text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{1 - 2\text{ज्या}^2\text{अ}}{1} = \frac{1}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 2$$

$$= \frac{\text{कोछे}^2\text{अ} - 2}{\text{कोछे}^2\text{अ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = १ - २ज्या^२अ = \frac{१ - २ज्या^२अ}{१}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ} - २ज्याअ}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\begin{aligned} (३) \text{ स्प२अ} &= \frac{\text{ज्या२अ}}{\text{कोज्या२अ}} = \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} \\ &= \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ}{१ - \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \\ &= \frac{२स्पअ}{१ - स्प^२अ} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२}{\frac{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ}{ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{२}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} । \end{aligned}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{१ - २ज्या^२अ} ।$$



$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^2\text{अ} - १} \quad |$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - १} \\ &= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोस्प}^2\text{अ} - १} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^2\text{अ} - १} \\ &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{२कोज्या}^2\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{२ - \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{२ - \text{छे}^2\text{अ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{१ - \text{२ज्या}^2\text{अ}} \\ &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{१ - \text{२ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - २} \\ &= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोछे}^2\text{अ} - २} \quad | \end{aligned}$$

$$(४) कोस्पर्श = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{२\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}} ।$$

एवं स्पष्टमवगम्यते यत् स्पर्शरेखाया हरभाज्ययोः परिवर्तनात् कोटिस्पर्शरेखा भवत्यतः पूर्वकृतस्पर्शरेखास्वरूपाणां हरभाज्ययोः परिवर्तनादेव सर्वेषां कोटिस्पर्शरेखास्वरूपाणां सिद्धिः सुप्तेन संपाद्या ।

$$(५) छे२अ = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}$$

$$= \frac{\frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{छे}^2\text{अ}}{२ - \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{छे}^2\text{अ}}{२ - \text{छे}^2\text{अ}} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^2\text{अ}} \text{ एते तु पूर्वकृत-}$$

वैश्यादतिविशदे ।

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{ज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{1 + \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1 - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} \\
 & = \frac{1 + \text{स्प}^2\text{अ}}{1 - \text{स्प}^2\text{अ}} ।
 \end{aligned}$$

$$\text{छे२अ} = \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} + 1}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 1}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} + 1}{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}}}{\frac{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} - २} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\text{कोछे}^२\text{अ} - २} ।$$

$$(६) \text{कोछे२अ} = \frac{१}{\text{ज्या२अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१ \times १}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = १ \text{ छेअ} = \text{कोछेअ} ।$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{\text{ज्या२अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{ज्याअ}} ।$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{२\text{कोज्याअ}} ।$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\frac{१}{२\text{ज्याअ}}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{२\text{स्पअ} \times \text{कोज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{छे}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} = \frac{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} ।$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोटेरज} &= \frac{1}{\text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} = \frac{1 \times 1}{1 \times \text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} \\
 &= \frac{1}{\text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} = \frac{\text{ज्या}^2\text{अ} + \text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{रकोज्याज} \cdot \text{ज्याज}} \\
 &= \frac{\frac{\text{ज्याज}}{\text{कोज्याज}} + \frac{\text{कोज्याज}}{\text{ज्याज}}}{2} = \frac{\text{स्पज} + \text{कोस्पज}}{2} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोटेरज} &= \frac{1}{\text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} = \frac{1}{\text{रज्या}^2\text{अ} \cdot \frac{\text{कोज्याज}}{\text{ज्याज}}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याज}}} = \frac{\text{कोटे}^2\text{अ}}{\text{रकोस्पज}} = \frac{1 + \text{कोस्प}^2\text{अ}}{\text{रकोस्पज}} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (७) \quad \text{उरज} &= 1 - \text{कोज्यारज} = 1 - (\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}) \\
 &= 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्या}^2\text{अ} । \\
 \text{उरज} &= 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ} \\
 &= 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} + 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} \\
 &= 2 - 2 \text{कोज्या}^2\text{अ} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{उरज} = \text{रज्या}^2\text{अ} &= \frac{\frac{\text{रज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1} = \frac{\text{रस्प}^2\text{अ}}{\text{छि}^2\text{अ}} = \frac{\text{रस्प}^2\text{अ}}{1 + \text{स्प}^2\text{अ}} ।
 \end{aligned}$$

$$\text{च२भ} = \text{रज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{रज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ, कोज्याअ}} = \frac{\text{रज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \\ = \frac{1}{\text{ज्याअ, कोज्याअ}} = \frac{1 \times 1}{1 \times \text{ज्याअ, कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रस्पअ}}{1} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} + \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ, कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रस्पअ}}{\text{ज्याअ} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} \quad |$$

$$\text{च२भ} = \text{रज्या}^2\text{अ} = \frac{2}{1} = \frac{2}{\text{कोछे}^2\text{अ}} = \frac{2}{1 + \text{कोस्प}^2\text{अ}} \quad |$$

$$\text{उ२भ} = \text{रज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{रज्याअ}}{1} = \frac{\text{रज्याअ}}{\text{कोछेअ}} \quad |$$

$$\text{च२भ} = \text{रज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{रज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{रस्प}^2\text{अ}}{\text{छे}^2\text{अ}} = \frac{\text{स्प}^2\text{अ}}{\text{छे}^2\text{अ}}$$

$$= 2 \frac{\text{छे}^2\text{अ} - 1}{\text{छे}^2\text{अ}} \quad |$$

$$\text{स२अ} = \text{२ज्या}^2\text{अ} = \frac{\frac{\text{२ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = २ \frac{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २ \frac{\frac{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = २ \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}} - \text{कोज्याअ}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २ \frac{\text{छेअ} - \text{कोज्याअ}}{\text{छेअ}} ।$$



अथ

३९ पृष्ठस्थ—३२ प्रक्रमोक्तसारण्युत्पादनप्रकारश्चात्रैवान्ते

३३ प्रक्रमस्यापि निवेशः ।

(१) तत्रादावेकस्याः कलाया व्याकोटिज्यानयनम् ।

व्याञ = ३  $\left\{ \sqrt{१ + व्या२अ} - \sqrt{१ - व्या२अ} \right\}$  । अत्र यदि \*

$$२अ = १५^{\circ} \text{ अत एव व्या२अ} = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} = * २५८८१९०४५१०२,$$

इत्यादि ।

$$\text{तथा व्या } \frac{१५^{\circ}}{२} = † १३०५२६१९२२२० \text{ इत्यादि} = ज, ।$$

पुनर्यदि ज, अनेन २अ इदमुत्थाप्येत तदा

\* अथावर्गाङ्कानां मवीनगणितरीत्या मूलानयनम् ।

यथा  $\sqrt{२} = १ +$  शेषावयवाः । अत्रावयवा 'दशमलव'-स्य नियमानुसारेण २४) १०० (४

$$\begin{array}{r} ९६ \\ २८१) ४०० (१ \\ २८१ \\ \hline २८२४) ११९०० (४ \\ ११२९६ \end{array}$$

..... ।

$$\text{एवम् } \sqrt{२} = १.४१४..... \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{एवम् } \sqrt{३} = १.७३२..... \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{अतः व्या } १५ = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} = २५८८..... \text{ इत्यादि ।}$$

† 'क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलात्', 'त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं' वाऽर्धाशयेत्यतः ।



$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०६५४०३१२९२३० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_२$$

एवं मुहुरर्धांशज्यायां गृहीतायाम्

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०००५११३२६९०१ \text{ इत्यादि} = \text{ज}_२$$

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०००२५५६६३४५० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_१$$

एवमुत्पद्यते ।

अत्र ज<sub>१</sub>, इयं ज<sub>२</sub> अस्या अर्धेन समं भवतीति स्पष्टं दृश्यते ।  
अनेनेदमनुमीयते यत् सूक्ष्मकोणयोरेकस्य अतसंख्यापूरणोऽंशस्तज्या  
भवति तत्संख्यापूरणोऽंशोऽपरकोणस्यापि स्वल्पान्तरात् तज्या भवतीति

$$\frac{१५ \times ६०}{२^{१०}} : \text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} :: १' : \text{ज्या } १'$$

$$\therefore \text{ज्या } १' = \text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} \times \frac{२^{१०}}{१५ \times ६०}$$

$$= ०००२५५६६३४५०... \times \frac{२५६}{२२५} = ०२९०८८८१९२.....$$

$$\text{एवम् } \therefore \text{कोज्याअ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\therefore \text{कोज्या } १' = \sqrt{१ - (०२९०८८८१९२...)^2} \\ = ९९९९९९९५७६९२... ।$$

(२) द्वित्रयादीनां कलानामंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

$$\text{ज्या (अ + क)} = * \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्या (अ - क)}$$

\* अत्र २० प्रक्रमावलोकनतः स्फुटम् ।

$$= * २ज्याअ \left\{ १ - २ज्या^{\frac{१}{२}}क \right\} - ज्या (अ - क)$$

$$= २ज्याअ - ज्या (अ - क) - ४ ज्याअ \cdot ज्या^{\frac{१}{२}}क$$

अतो यदा (क) स्थाने १' तथा (अ) स्थाने १', २', ३' इत्याद्याः

स्युस्तदा

$$ज्या२' = २ज्या१' + ज्या (१' - १') - ४ ज्या १' \times ज्या^{\frac{१}{२}}३०'' ।$$

$$ज्या३' = २ज्या२' + ज्या (२' - १') - ४ ज्या २' \times ज्या^{\frac{१}{२}}३०'' ।$$

$$ज्या४' = २ज्या३' + ज्या (३' - १') - ४ ज्या ३' \times ज्या^{\frac{१}{२}}३०'' ।$$

इत्यादि ।

एकस्याः कलाया ज्याया अवगमादत्र ४ज्या<sup>१</sup>३०'' एतन्मानं सुखेन ज्ञायते तत उक्तयुक्त्या द्विज्यादिकलानां ज्ञानं सुगमम् ।

अनयैव युक्त्यैकस्यांशस्य त्रिशतः कलानां च जीवां विज्ञाय द्विज्यायांशानां जीवाः सुखेन ज्ञातुं शक्याः ।

$$\text{एवं } * \text{ कोज्या (अ + क) } = २कोज्याअ \cdot कोज्याक - कोज्या (अ - क)$$

$$= २कोज्याअ (१ - २ज्या^{\frac{१}{२}}क) - कोज्या (अ - क)$$

$$= २कोज्याअ - कोज्या (अ - क) - ४कोज्याअ \cdot ज्या^{\frac{१}{२}}क ।$$

अतो यद्यत्र क = १', तथा अ = एकद्विज्यादिकलाः स्युस्तदा

$$कोज्या २' = २कोज्या१' - कोज्या (१' - १') - ४कोज्या१' \times ज्या^{\frac{१}{२}}३०'' ।$$

$$कोज्या ३' = २कोज्या२' - कोज्या (२' - १') - ४कोज्या२' \times ज्या^{\frac{१}{२}}३०'' ।$$

$$कोज्या ४' = २कोज्या३' - कोज्या (३' - १') - ४कोज्या३' \times ज्या^{\frac{१}{२}}३०'' ।$$

इत्यादि ।

अतोऽपि ४ज्या<sup>१</sup>३०'' एतन्मानज्ञानात् द्विज्यादिकलानां कोटि-ज्यावगमः सुगमः । एवमेकस्यांशस्य कोटिज्यायां त्रिशतः कलानां च जीवायां ज्ञातायां द्विज्यादिकांशानामपि कोटिज्याज्ञानं सुलभम् ।

$$* \text{ अत्र २४ प्रक्रमतः } * २ज्या^{\frac{१}{२}}क = १ - कोज्याक$$

$$* \text{ कोज्याक } = १ - २ज्या^{\frac{१}{२}}क$$

(३) द्विज्याद्यंशानां प्रकारान्तरेण ज्याकोटिज्यानयनम् ।

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वम् ज्या२अ} = २ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ} \\ \text{कोज्या२अ} = २कोज्याअ - १ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{आभ्यामंशद्वयस्य} \\ \text{ज्याकोटिज्ये विज्ञाय} \end{array}$$

$$\text{ततः ज्या ( अ + क )} = \frac{(\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}) (\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})}{\text{ज्या ( अ - क )}}$$

$$\text{कोज्या ( अ + क )} = \frac{(\text{कोज्याअ} + \text{ज्याक}) (\text{कोज्याअ} - \text{ज्याक})}{\text{कोज्या ( अ - क )}}$$

आभ्यां ज्यादीनामंशानां ज्याकोटिज्याज्ञानं सुगमम् ।

$$\text{तथा हि ज्या३°} = \frac{(\text{ज्या२°} + \text{ज्या१°}) (\text{ज्या२°} - \text{ज्या१°})}{\text{ज्या१°}}$$

$$\text{ज्या४°} = \frac{(\text{ज्या३°} + \text{ज्या१°}) (\text{ज्या३°} - \text{ज्या१°})}{\text{ज्या२°}} \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या३°} = \frac{(\text{कोज्या२°} + \text{ज्या१°}) (\text{कोज्या२°} - \text{ज्या१°})}{\text{कोज्या१°}}$$

$$\text{कोज्या४°} = \frac{(\text{कोज्या३°} + \text{ज्या१°}) (\text{कोज्या३°} - \text{ज्या१°})}{\text{कोज्या२°}} \text{ इत्यादि ।}$$

अन्यैव युक्त्या सैकज्यादिकलानामेकद्विज्याद्यंशानां ज्याकोटि-  
ज्यावगमः सुगमः । तथाहि—

$$\text{ज्या ( १°, १' )} = \frac{(\text{ज्या १°} + \text{ज्या १'}) (\text{ज्या १°} - \text{ज्या १'})}{\text{ज्या ५९'}}$$

$$\text{ज्या ( १°, २' )} = \frac{(\text{ज्या १°} + \text{ज्या २'}) (\text{ज्या १°} - \text{ज्या २'})}{\text{ज्या ५८'}} \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या } (१^{\circ}, १') = \frac{(\text{कोज्या } १^{\circ} + \text{ज्या } १') (\text{कोज्या } १^{\circ} - \text{ज्या } १')}{\text{कोज्या } ५९}$$

$$\text{कोज्या } (१^{\circ}, २') = \frac{(\text{कोज्या } १^{\circ} + \text{ज्या } २') (\text{कोज्या } १^{\circ} - \text{ज्या } २')}{\text{कोज्या } ५८} \text{ इत्यादि ।}$$

( ४ ) एवमनेन विधिना त्रिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्ये प्रसाध्याग्रे

$$\text{ज्या } ( अ + क ) = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्या } (अ - क)$$

$$\text{कोज्या } (अ + क) = \text{कोज्या } (अ - क) - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}$$

एतदाधारतः सुखेन ज्याकोटिज्ये अवगन्तव्ये ।

तथा हि, यदि अ = ३०° । क = एकद्विज्यादिकलास्तदा २ज्याअ = १' ।

$$\therefore \text{ज्या } ( ३०^{\circ} । १' ) = \text{कोज्या } १' - \text{ज्या } ( २९^{\circ} । ५९' ) ।$$

$$\text{ज्या } ( ३०^{\circ} । २' ) = \text{कोज्या } २' - \text{ज्या } ( २९^{\circ} । ५८' ) \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या } ( ३०^{\circ} । १' ) = \text{कोज्या } ( २९^{\circ} । ५९' ) - \text{ज्या } १'$$

$$\text{कोज्या } ( ३०^{\circ} । २' ) = \text{कोज्या } ( २९^{\circ} । ५८' ) - \text{ज्या } २', \text{ इत्यादि ।}$$

एवमिह केवलं व्यवकलनेन ज्याकोटिज्यावगमः ।

( ५ ) एवं पञ्चचत्वारिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्याः साध्याः । तदनन्तरम्—

$$\therefore \text{ज्या } ( ४५^{\circ} + अ ) = \text{कोज्या } ( ४५^{\circ} - अ )$$

$$\text{कोज्या } ( ४५^{\circ} + अ ) = \text{ज्या } ( ४५^{\circ} - अ )$$

अतो या एव ४५°पर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याः कोटिज्याश्च ता एव प्रातिलोभ्येन पञ्चचत्वारिंशदंशाधिकानां सकलानमंशानां कोटिज्या ज्याश्च भवन्ति ।

एवं सर्वेषां नवतरेंशानां ज्याकोटिज्यावगमात् तत्सारणीसंपादनं सुशकम् ।

$$( ६ ) \text{ यतः ज्या } ९०^{\circ} + अ = + \text{कोज्याअ} ।$$

$$\text{कोज्या } ( ९०^{\circ} + अ ) = - \text{ज्याअ}$$

$$\text{ज्या } ( १८०^{\circ} + अ ) = - \text{ज्याअ} । \text{ कोज्या } ( १८०^{\circ} + अ ) = - \text{कोज्याअ}$$

ज्या  $(270^\circ + अ) = -$  कोज्याअ । कोज्या  $(270^\circ + अ) = +$  ज्याअ  
अतो नवत्यंशपर्यन्तानामंशानां ज्याकोटिज्यासारणीत एव नव-  
त्यधिकानामप्यंशानां ज्याकोटिज्यावगमः सुशकः ।

( ७ ) स्पर्शरेखाणां कोटिस्पर्शरेखाणां च सारणीसंपादनम्

$$\text{स्पर्श} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोस्पर्श} = \frac{\text{को-ज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

एतदाधारतः सुशकम् ।

(८) एवं छेदनरेखाणां कोटिच्छेदनरेखाणां चोत्क्रमज्यानां कोट्यु-  
त्क्रमज्यानां च सारणी—

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} \quad \text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ}$$

$$\text{कोउअ} = १ - \text{ज्याअ}$$

आभ्यधतमृभ्यस्तत्तदुन्मितिभ्यः संपादयितुं सुशका ।

इति कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः ।

३३ । पूर्वसाधितज्यादीनां गुणनभजनाद्यपेक्ष्य तत्प्रघात-  
मापकानां गुणनभजनादिकेऽत्यल्पायासः स्यात् किन्तु कोणी-  
यज्यादीनां प्राय एकान्पत्वात् तत्प्रघातमापका ऋणगता  
भवन्त्यतः कोणीयज्यायाः  $१०^{10}$  एतद्व्यासार्धपरिणताः कृत्वा  
तादृशानां प्रघातमापकाः गणितलाघवाय सारण्यां लिख्यन्ते ।

त्रिकोणमितिसहायकं नवीनगणितम् ।

इह त्रिकोणमितौ पाश्चात्यगणितसंकेतानभिज्ञानां बहुधा  
प्रघातमापकाङ्गविचारे बुद्धिप्रागल्भ्यं न जायतेऽतः कतिचन  
तत्संकेतविषयाः प्रदर्श्यन्ते ।

घातवृद्धिः = Involution.

(१) यदि कश्चिदङ्गस्तेनैव तद्गुणेणेत्यादिभिर्गुण्यते तदा स  
तद्घाताङ्गपर्यन्तं वर्धयत इत्यतः सा घातवृद्धिरित्युच्यते ।

यथा—  $a \times a = a^{2*}$ , अत्र २ इति द्विघातः । एवम्  
 $a \times a \times a = a \times a^2 = a^3$ , ३ इति त्रिघातः । एवं यथेष्टं भवितु-  
 मर्हति ।

(२) घातद्वयौ घनर्णत्वं तद्घाताङ्कत एवावगम्यतेऽर्थाद्  
 घाताङ्के विषये तथा तदङ्कस्यर्णत्वे तत्फलमृणमन्यथा धनम् ।

यथा—  $-a \times -a \times -a = -a^3$ ,

$-a \times -a \times -a \times -a = a^4$ , एवं सर्वत्र ।

(३) द्वयोर्घातवर्धिताङ्कयोर्घाते क्रियमाणे तदङ्कस्योपरि  
 द्वयोर्घातमापकाङ्कयोर्योगाङ्कदानेन वर्धिताङ्कघातो भवति ।

यथा—  $a^2 \times a^2 = a^{2+2} = a^4$ ,

$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ , एवमन्यदपि ।

(४) वर्धिताङ्कभागहारे भाज्यहारयोर्घाताङ्कवियोगाल्लब्धिः  
 संपद्यते ।

यथा—  $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$  ।

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a} ।$$

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1 ।$$

$$\text{एवम् } \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0 = 1 ।$$

$$\therefore \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \times a \times a}{a \times a} = a \quad \therefore a^1 = a ।$$

\* अ-कारस्योपरि द्वित्र्याद्यङ्काः स्थाप्यन्ते । ते घातक्षापका वा  
 घातमापकाः ( Powers ) इत्युच्यन्ते ।

$$\therefore \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a}{a \times a \times a} = \frac{1}{a} \therefore a^{-1} = \frac{1}{a} ।$$

$$\therefore \frac{a^2}{a^2} = \frac{a \times a}{a \times a} = 1 \therefore a^0 = 1 ।$$

(५) उक्तनियमानुमृत्यैव कतिचनान्ये विषया अपि तत्प्रयोजनकाः प्रदर्श्यन्ते ।

यथा—  $a^2$ , इत्यत्र घाताङ्को ५, ६, ७.....!...इत्यादि यथेष्टं भवितुमर्हति, सत्र यदि ५, ६, ७.....न-पर्यन्तं भवेत् तदा  $a^2 \times a^2 \times a^2 \dots\dots\dots a^n$  । अत्रैव यदि कल्प्यते  $5 = n$ ,  $6 = m$ , ७ स, तदा  $a^5 \times a^6 \times a^7 = a^n \times a^m \times a^s = a^{n+m+s}$  ।

$$\text{एवमेव } \frac{a^5 \times a^6}{a^7} = \frac{a^n \times a^m}{a^s} = \frac{a^{n+m}}{a^s} = a^{n+m-s} ।$$

$$\text{एवम् } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}} ।$$

(६) घातज्ञापकाङ्कवैचित्र्यं प्रदर्श्यते ।

यथा—  $a = a^1$ , भिन्नयोगकमात्  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$\therefore a^1 = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$$

$$\therefore \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \text{ इदं वर्गमूलज्ञापकं चिह्नम् ।}$$

$$\text{एवं यदि } 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{ तदा } a^1 = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \text{ इदं घनमूलज्ञापकम् ।}$$

अथ लघुरिक्थगणितम् = Logarithms.

(७) नेव्यगणितं घाताङ्को घातचिह्नं वा तन्मूलाङ्काधारोपरि तस्याङ्कस्य लघुरिक्थं प्रघातमापकं संप्रतीह त्रिकोणमितौ व्यपदिश्यते ।

यथा— $३^{\circ} = ८१$ , अत्र ४ इदं त्र्यङ्काधारोपरि ८१ अस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वाऽस्ति ।

एवमव्यक्तस्थित्या—यदि  $अ^{\text{क}} = न$  तदा क-इदम् अ-आधारोपरि-न-इत्यस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वा . . क = लघु<sub>अ</sub>न ।

(८) द्वयोरङ्गयोरुणनफलस्य लघुरिक्थं तदङ्गयोर्लघुरिक्थयोर्योगेन समो भवति ।

यथा—यदि  $अ^{\text{क}} = न$ ,  $अ^{\text{य}} = म$ , तदा  $न + म = अ^{\text{क}} + अ^{\text{य}}$   
 $= अ^{\text{क}} + अ^{\text{य}}$ , . . क + य = लघु<sub>अ</sub>नम = लघु<sub>अ</sub>न + लघु<sub>अ</sub>म ।

(९) लघ्वेर्लघुरिक्थं हरस्य लघुरिक्थेनोनितेन भाज्य-लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा—यदि  $म = अ^{\text{य}}$ ,  $न = अ^{\text{क}}$

. तदा  $\frac{म}{न} = \frac{अ^{\text{य}}}{अ^{\text{क}}} = अ^{\text{य-क}}$ . लघु<sub>अ</sub>  $\frac{म}{न} = लघु<sub>अ</sub>म - लघु<sub>अ</sub>न ।$

(१०) कस्यापि लघुरिक्थं यदीष्टघातवृद्धिपर्यन्तं वर्धयते तदा तत् तद्घातवृद्धिपर्यन्तं वर्धितस्य तस्य लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा—न लघु<sub>अ</sub>म = लघु<sub>अ</sub>(  $म^{\text{न}}$  ) ।

कल्प्यते— $अ^{\text{क}} = म$  . . क = लघु<sub>अ</sub>म,

एवम्  $म^{\text{न}} = ( अ^{\text{क}} )^{\text{न}} = अ^{\text{नक}}$

. . लघु<sub>अ</sub>(  $म^{\text{न}}$  ) = न क = न लघु<sub>अ</sub>म ।

व्यक्तस्थित्या—लघु४८ = लघु(  $२^{\circ} \times ३$  ) = लघु२<sup>३</sup> + लघु३  
 = ४लघु२ + लघु३ ।



$$\begin{aligned}
 \text{लघु } \frac{६३}{४८४} &= \text{लघु } \frac{७ \times ३^२}{२^२ \times ११^२} \\
 &= \text{लघु } ७ + \text{लघु } ३^२ - \text{लघु } २^२ - \text{लघु } ११^२ \\
 &= \text{लघु } ७ + २\text{लघु } ३ - २\text{लघु } २ - २\text{लघु } ११ । \\
 \text{एवम् लघु } \sqrt{१३} &= \text{लघु } १३\frac{१}{२} = ३\text{लघु } १३ ।
 \end{aligned}$$

(११) साधारणतो दशाङ्काधारोपरि लघुरिक्थस्य नियमो-  
ज्जस्ति, यत्राधारो न दत्तस्तत्र दशाङ्कोऽध्याह्रियते ।

(१२) लघुरिक्थसंख्यायां पूर्णाङ्कः 'कैरेक्टैरिस्टिक्'  
(Characteristic) एकत्रान्यो भिन्नाङ्को दशमलवः 'मैण्टीसा'  
(Mantissa) कथ्यते ।

यथा—लघु ७९५ = २.९००३६७१, अत्र द्वयं पूर्णाङ्कः,  
०.९००३६७१ अयं दशमलवाङ्कः ।

नियताङ्कानां नियतचापांशग्यादीनां च लघुरिक्थार्थं तत्सार-  
ण्यबलोक्या ।

(१३) कस्यापि नियताङ्कलघुरिक्थे पूर्णाङ्कः सर्वदाऽधो-  
लिखितनियमानुसारेण ज्ञायते ।

$$\text{यथा—} \therefore १०^० = \quad १ \therefore \text{लघु} \quad १ = ० ।$$

$$\therefore १०^१ = \quad १० \therefore \text{लघु} \quad १० = १ ।$$

$$\therefore १०^२ = \quad १०० \therefore \text{लघु} \quad १०० = २ ।$$

$$\therefore १०^३ = \quad १००० \therefore \text{लघु} \quad १००० = ३ ।$$

$$\therefore १०^४ = \quad १०००० \therefore \text{लघु} \quad १०००० = ४ ।$$

$$\therefore १०^५ = \quad १००००० \therefore \text{लघु} \quad १००००० = ५ ।$$

इत्यादि ।

(१) अत एकमारभ्य दशपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं शून्यत एकपर्यन्तं भवत्यतः पूर्णाङ्कः शून्यं दशमलवाङ्का भवन्ति ।

(२) दशतः शतपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थमेकद्वयान्तस्तत एकः पूर्णाङ्कस्ततोऽग्रे दशमलवाङ्काः ।

(३) शततः सहस्रपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं द्वयत्रयान्तः, एवं सहस्रतो दशसहस्रपर्यन्तमङ्कानां त्रिचतुरन्त एव पूर्णाङ्कानां दशमलवाङ्कानां विवेकः कर्त्तव्यः । अत्र पूर्णाङ्का दशमलवाङ्काश्च धनात्मका एव ।

(४) एकात्पानां भिन्नानां लघुरिक्थमृणात्मकं भवति ।

यथा—  $\therefore 10^0 = 1, \therefore \text{लघु } 1 = 1$

$\therefore 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \therefore \text{लघु } 0.1 = -1$

$\therefore 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01 \therefore \text{लघु } 0.01 = -2$

$\therefore 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001 \therefore \text{लघु } 0.001 = -3$

एवमन्यदपि ।

(५) एवमिहैकतः  $\frac{1}{10}$  एतत्पर्यन्तं शून्यत मृणात्मकैकान्तलं लघुरिक्थं भवत्यतस्तस्य पूर्णाङ्के मस्तकोपरि तिर्यमेखा दीयते ।

यथा—  $-1 + ( \text{यत्किञ्चिदशमलवाङ्कः} )$

अतोऽत्र पूर्णाङ्कः  $= \bar{1}$ , एवम्  $\bar{2}$ ,  $\bar{3}$  इत्यादि ।

अथ

## चतुर्थोऽध्यायः ।

अत्र त्रिभुजगणितं ततो वंशादीनां दैर्घ्योच्छयाद्यवगमकोदाहरणानि चोच्यन्ते ।

त्रिभुजगणितम् ।

५४ । त्रिभुजस्य पण्णामवयवानामन्यतमेभ्यस्त्रिभ्योऽवयवेभ्यः शेषावयवज्ञानाय यद्वर्ण्यते तत् त्रिभुजगणितसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणत्रयमात्रज्ञाने शेषावयवानामनियतत्वात् तत्र त्रिभुजगणितप्रसक्तिः ।

१ जात्यत्रिभुजगणितम् ।

५५ । जात्यत्रिभुजे एकावयवः समकोणत्वाज्ज्ञात एव शेषाणामन्यतमाभ्यां कोणद्वयेतरावयवाभ्यां शेषावयवावगमः (३७)प्रक्रमतः सुश्रवकः ।

तथा हि, प्रथमः प्रकारः—

कल्प्यताम् अमुजो ज्ञातः, तत्संमुखः आकोणश्च ज्ञात इति तदा

$$\left\{ \begin{array}{l} \therefore \text{आ} + \text{का} = \text{गा} = ९०^{\circ} \\ \therefore \text{का} = ९०^{\circ} - \text{आ}, \text{ एवं काकोणो ज्ञायते } \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{एवम् } \therefore \quad \text{स्पआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} \therefore \text{क} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} \\ \text{तथा} \quad \text{ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \therefore \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \end{array} \right\} \text{अत्र}$$

स्पआ, ज्याआ अनयोरिष्टन्यासार्धे(त्रि)परिणामितयोः सिद्धे क, ग माने

$$\text{क} = \frac{\text{अ}}{\frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}}} = \frac{\text{त्रि-अ}}{\text{स्पआ}} \quad \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}} = \frac{\text{त्रि-अ}}{\text{ज्याआ}} ।$$

अत्र किल त्रिव्या १०<sup>१०</sup> एतावती कल्प्यते तस्या दशमूलकः  
प्रघातमापको दश भवन्ति । अतः कमानस्य प्रघातमापकः = प्रघादक  
= १० + प्रघादअ - प्रघादस्पआ ।

एवं गमानस्य प्रघातमापकः = प्रघादग  
= १० + प्रघादअ - प्रघादज्याआ

एवं सर्वत्र प्रघातमापकरूपविधानमवगम्यम् ।  
एव शेषभुजौ ज्ञायेते ।

उदा० । अ† = १२० । आ = ४५° । १४' । २३" शेषावयवाः क  
इति प्रभः ।

अत्र का = ९०° - ४५° । १४' । २३" = ४४° । ४५' । ३७"  
तदा प्रघादक = १० + प्रघादअ - प्रघादस्पआ  
= १० + २०७९१८१२ - १०००३६३४२  
=  $\begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - १०००३६३४२ \end{cases}$   
= २०७५५४७० = प्रघाद११९ . ∴ क = ११९ ।

\* ∴ क =  $\frac{\text{त्रि अ}}{\text{स्पआ}}$  अतोऽत्र मदर्शितलघुरिक्तगणितस्यौ (८, ९)

नियमावबलोक्यौ ।

† प्रघाद इदं चिह्नं दशमूलकप्रघातमापकस्योक्तम् ।

‡ नियताङ्कानां तथा नियतचापांशान्यादीनां च लघुरिक्तार्थमङ्गल-  
भाषावद्धनियमादिका 'चैम्बर्स-मैथेमेटिकल्-टेबल्स' (Chambers's  
Mathematical Tables) एतन्नामिका सारण्यवलोक्या । तत्र  
दशमलकाङ्कास्तु सन्त्येव पूर्णाङ्कार्यं मदर्शितलघुरिक्तगणितस्य-(१३)  
नियमस्य टिप्पण्यवलोक्या ।

अथ च प्रघाटग = १० + प्रघाटअ - प्रघाटज्याआ

$$= १० + २०७९१८१२ - ९८५१२९४५$$

$$= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - ९८५१२९४५ \end{cases}$$

$$= २२२७८८६७ = \text{प्रघाट} १६९^{\circ} . ग = १६९ ।$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः का = ४४° । ४५' । ३७"

$$क = ११९$$

$$ग = १६९ ।$$

द्वितीयः प्रकारः—

कल्प्यताम् अभुजस्तरसंलग्नः काकोणश्च ज्ञात इति तदाऽत्र  
आ = ९०° - का

$$(प्र० ३७) \left\{ \begin{array}{l} \text{रूपका} = \frac{क}{अ} \therefore क = \text{अ-रूपका} \\ \text{कोज्याका} = \frac{अ}{ग} \therefore ग = \frac{अ}{\text{कोज्याका}} \end{array} \right.$$

क, ग अनयोः प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटरूपका} - १०$$

$$\text{प्रघाटग} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटकोज्याका} ।$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । अ = १२० । का = ४४° । ४५' । ३७" अत्र शेषावयवाः  
क इति प्रभः ।

$$\text{अत्र आ} = ९०^{\circ} - (४४^{\circ} । ४५' । ३७) = ४५^{\circ} । १४' । २३''$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रघाटक} &= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटस्पका} - १० \\
 &= २०७९१८१२ + ९०९६३६५८ - १० \\
 &= \begin{cases} + २०७९१८१२ \\ + ९०९६३६५८ \\ - १० \end{cases} \\
 &= २०७५५४७० = \text{प्रघाट११९} \therefore \text{क} = ११९
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रघाटग} &= १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटकोज्याका} \\
 &= १० + २०७९१८१२ - ९८५१२९४५ \\
 &= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - ९८५१२९४५ \end{cases} \\
 &= २२२७८८६७ = \text{प्रघाट१६९} \therefore \text{ग} = १६९
 \end{aligned}$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ = ४५° १४' २३"

$$\text{क} = ११९$$

$$\text{ग} = १६९ ।$$

तृतीय. प्रकारः—

कल्प्यतां गभुजस्तर्सलगत (आ)-कोणश्च ज्ञाताविति ।

उदाऽत्र का = ९०° - आ

$$\text{ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \therefore \text{अ} = \text{ग} \cdot \text{ज्याआ}$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \therefore \text{क} = \text{ग} \cdot \text{कोज्याआ}$$

प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटज्याआ} - १०$$

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोज्याआ} - १०$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । ग = १६९ । आ = ४५° १४' २३" शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

$$\text{अत्र का} = ९०^{\circ} - (४५^{\circ} १४' १३'') = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटज्याआ} - १०$$

$$= \begin{cases} + २२२७८८६७ \\ + ९८५१२९४५ \\ - १० \end{cases}$$


---


$$= २०७९१८१२ = \text{प्रघाट१२०, } \therefore \text{अ} = १२० ।$$

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोज्याआ} - १०$$

$$= \begin{cases} + २२२७८८६७ \\ + ९८४७६६०३ \\ - १० \end{cases}$$


---


$$= २०७५५४७० = \text{प्रघाट११९, } \therefore \text{क} = ११९ ।$$

$$\text{एवं सिद्धाः शेषावयवाः का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{अ} = १२०$$

$$\text{क} = ११९ ।$$

चतुर्थः प्रकारः—

कल्प्यताम् अ, गभुजौ ज्ञाताविति

$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्, प्रघाटज्याआ = १० + प्रघाटअ - प्रघाटग ।

$$\text{एवम् आकोणे ज्ञाते ततः का} = ९०^{\circ} - \text{आ}$$

$$\text{प्रघाटक} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटस्पआ} ।$$

एवं काकोण-गभुजौ व्यक्तौ भवतः ।

यद्वा  $\text{क}^2 = \text{ग}^2 - \text{अ}^2$  इति क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य ४७ प्रतिज्ञया

सिद्ध्यति । अतः कोणनिरपेक्षविधिनैव कभुजौ व्यक्तौ भवति ।

उदा० । अ = १२० । ग = १६९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned}
 \text{अत्र प्रघाट्याआ} &= १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटग} \\
 &= १० + २०७९१८१२ - २२२७८८६७ \\
 &= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - २२२७८८६७ \end{cases} \\
 &= ९८५१२९४५ = \text{प्रघाट्या} ४५^{\circ} १४' २३''
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{का} = ९०^{\circ} - (४५^{\circ} १४' २३'') = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{अथ च प्रघाटक} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटस्पआ}.$$

$$\therefore \text{क-मातम्} = ११९$$

$$\text{एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\text{का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{क} = ११९ ।$$

$$\begin{aligned}
 \text{यद्वा क} &= \sqrt{ग^2 - अ^2} = \sqrt{(१६९)^2 - (१२०)^2} = ११९ \text{ सिद्धः} \\
 \text{स एव भुजः ।}
 \end{aligned}$$

पञ्चमः प्रकारः—

$$\text{कस्यताम् अ, क भुजौ ज्ञाताविति तदा स्पआ} = \frac{अ}{क} ।$$

$$\text{यद्वा प्रघाटस्पआ} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटक} ।$$

एवम् आ-कोणं ज्ञात्वा सतः

$$\text{का} = ९०^{\circ} - \text{आ}$$

$$\text{तथा प्रघाटग} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाट्याआ}$$

एवं का-कोण-ग-भुजौ विज्ञेयौ ।

यद्वा ग<sup>२</sup> = अ<sup>२</sup> + क<sup>२</sup>, एवं क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य (४७) प्रतिज्ञया ग भुजौ व्यक्तौ भवति ।



उदा० । अ = १२० । क = ११९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघाटस्या = १० + प्रघाटअ - प्रघाटक

$$= १० + २०७९१८१२ - २०७५५४७०$$

$$= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - २०७५५४७० \end{cases}$$

$$= १०००३६३४२ = \text{प्रघाटस्य } ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

सथा प्रघाटग = १० + प्रघाटअ - प्रघाटआभा । अस्मात् सिद्धं

$$\text{ग-भुजमानम्} = १६९ ।$$

$$\text{यद्वा ग} = \sqrt{(१२०)^2 + (११९)^2} = १६९ \text{ सिद्धः स एव ।}$$

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

जात्यान्निभुजे

ज्ञातावयवाः

क्षेपावयवाः

$$(१) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = २१ \\ \text{आ} = ४६^{\circ} २३' ५०'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ४३^{\circ} ३६' १०'' \\ \text{क} = २० । \text{ग} = २९ \end{array} \right\}$$

$$(२) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १०० \\ \text{आ} = ५४^{\circ} १७' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ३५^{\circ} ४३' \\ \text{क} = ७१९०११५ \\ \text{ग} = १२३१६६६५ \end{array} \right\}$$

$$(३) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १३६ \\ \text{का} = ६३^{\circ} ३१' ८'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = २६^{\circ} २८' ५२'' \\ \text{क} = २७३ । \text{ग} = ३०५ \end{array} \right\}$$

$$(४) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १३५ \\ \text{का} = २५^{\circ} २३' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ६४^{\circ} ३७' \\ \text{क} = ६४०५४२८ \\ \text{ग} = १४९४२५५७ \end{array} \right\}$$

$$(५) \left\{ \begin{array}{l} ग = ५४^{\circ} २१' \\ आ = ३१^{\circ} ४५' २२'' ४'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} का = ५८^{\circ} १४' ३७'' ६'' \\ अ = २८८ \\ क = ४६५.२९ \end{array} \right\}$$

$$(६) \left\{ \begin{array}{l} ग = ९२१७ \\ आ = १^{\circ} ११' ३७'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} का = ८८^{\circ} ४८' २३'' \\ अ = १९२. क = ९२१५ \end{array} \right\}$$

$$(७) \left\{ \begin{array}{l} अ = ४०६० \\ ग = ५७४१ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ४५^{\circ} १०' २५'' ४'' \\ का = ४४^{\circ} ५९' ३४'' ६'' \\ क = ४०५९ \end{array} \right\}$$

$$(८) \left\{ \begin{array}{l} क = २२४ \\ ग = ७८२ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ७३^{\circ} २१' १७'' \\ का = १६^{\circ} ३८' ४३'' \\ अ = ७४९.२३५२ \end{array} \right\}$$

$$(९) \left\{ \begin{array}{l} अ = २० \\ क = ९९ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ११^{\circ} २५' १६'' ३'' \\ का = ७८^{\circ} ३४' ४३'' ७'' \\ ग = १०१ \end{array} \right\}$$

$$(१०) \left\{ \begin{array}{l} अ = १६ \\ क = ११.५२९ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ५४^{\circ} ११' २९'' ६'' \\ का = ३५^{\circ} ४६' ३०'' ४'' \\ ग = १९.७२१ \end{array} \right\}$$

अथाजाल्यस्रगणितम् ।

५६ । अजाल्यस्रस्य त्रिष्ववयवेषु ज्ञातेषु शेषावयवा ज्ञायन्ते तदन्पेषु ज्ञातेषु वा त्रिष्वपि कोणेषु ज्ञातेषु शेषावयवज्ञानं न भवति ।

अजाल्यस्रगणितस्यानेके प्रकारा भवन्ति त सच्यन्ते ।

प्रथमः प्रकारः—

यदा स्रस्र एको भुजः अ, कोणद्वयं च आ, का ज्ञातं भवति ।

तदा  $\therefore$  आ + का + गा =  $180^\circ$   $\therefore$  गा =  $180^\circ - (\text{आ} + \text{का})$

एवं तृतीयकोणो ज्ञायते ।

अथ (३६) प्रक्रमतः  $\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$

$\therefore$  क =  $\frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्याआ}}$  अस्त्य प्रघातमापकरूपम्

प्रघा<sub>६</sub>क = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्याका - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

साजात्यात् प्रघा<sub>६</sub>ग = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्यागा - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

एव शेषमुजौ ( क, ग ) ज्ञायते

तदा ०(१)अ =  $14^\circ$ , आ =  $67^\circ 12' 18''$ , का =  $43^\circ 10' 18''$

शेषान्वयवाः क इति मन्तः ।

अत्र गा =  $180^\circ - (67^\circ 12' 18'' + 43^\circ 10' 18'')$ ,  
 $= 180^\circ - (110^\circ 22' 36'') = 69^\circ 37' 24''$

एवं प्रघा<sub>६</sub>क = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्याका - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

$= 1.1760913 + 9.9030900 - 9.9642379$ ,

$= \begin{cases} + 11.0791813 \\ - 9.9642379 \end{cases}$

$= 1.1149438 = \text{प्रघा}_{६} १३ \therefore$  क = १३ ।

प्रघा<sub>६</sub>ग = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्यागा - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

$= 1.1760913 + 9.9342786 - 9.9642379$

$= \begin{cases} + 11.1103599 \\ - 9.9642379 \end{cases}$

$= 1.1461220 = \text{प्रघा}_{६} १४ \therefore$  ग = १४ ।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः  $\begin{cases} \text{गा} = ५९^{\circ} । २९' । २३'' \\ \text{क} = १३ । ग = १४ । \end{cases}$

तदा ०(२)अ = १०।का = १२६°।५२'।११-६"।गा = २५°।३'।२७-४"

शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र आ = १८०° - (१२६°।५२'।११-६" + २५°।३'।२७-४")  
= १८०° - (१५१°।५५'।३९") = २८°।४'।२१"

ततः प्रघाटक = प्रघाटअ + प्रघाटज्याका - प्रघाटज्याआ  
= १००००००० + ९९०३०९०० - ९६७२६४११

=  $\begin{cases} + १०९०३०९०० \\ - ९६७२६४११ \end{cases}$

= १२३०४४८९ = प्रघाट१७. ∴ क = १७ ।

= प्रघाटग = प्रघाटअ + प्रघाटज्यागा - प्रघाटज्याआ  
= १००००००० + ९६२६८८३६ - ९६७२६४११

=  $\begin{cases} + १०६२६८८३६ \\ - ९६७२६४११ \end{cases}$

= ०९५४२४२५ = प्रघाट९. ∴ ग = ९

एवं सिद्धाः शेषावयवाः  $\begin{cases} \text{आ} = २८^{\circ} । ४' । २१'' \\ \text{क} = १७ । ग = ९ । \end{cases}$

द्वितीयः प्रकारः—

यदा त्र्यस्त्रे भुजौ ( अ, क ) तयोरन्यतरस्य संमुखकोणम् ( आ )  
इति ज्ञातं भवति तदा ( ३७ ) प्रक्रमतः

$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$



$$\therefore \text{व्याका} = \frac{\text{क-ज्यामा}}{\text{अ}}$$

ततः गा = १८०° - ( आ + का ) एवं शेषकोणौ ज्ञेयौ ।

$$\text{अथ} \quad \therefore \frac{\text{ज्यामा}}{\text{ज्यागा}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

$$\therefore \text{ग} = \frac{\text{अ.ज्यागा}}{\text{ज्यामा}}$$

एवं का, ग अनयोर्मानयोः प्रघातमापकरूपे

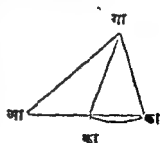
$$\text{प्रघातज्याका} = \text{प्रघातज्यामा} + \text{प्रघातक} - \text{प्रघातअ}$$

$$\text{प्रघातग} = \text{प्रघातज्यागा} + \text{प्रघातअ} - \text{प्रघातज्यामा}$$

अत्रेदमवधेयम् । कोणस्य ज्यायास्तत्कोणोनसमकोणद्वयस्य ज्याया तुल्यत्वाद्वा ज्यातो लब्धं कामनं साशीतिसत्ताच्छुद्धं काकोणस्य द्वितीयमानं भवति । परं यदि क-भुजात् अ-भुजो लघुः स्यात् । अन्यथा नेति । यतः क-भुजात् अ-भुजस्याल्पत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽल्पः स्यात् । ततः पूर्वसाधितयोः का-कोणमानयोर्योगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् तन्मानयोरेकैकस्य का-कोणादल्पत्वेन आ-कोणेन युतस्य समकोणद्वयाल्पत्वाद्वा का कोणमानद्वयसंभवः । परन्तु क-भुजात् अ-भुजस्याधिकत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽधिकः स्यात् । अतस्तेन युतस्य का-कोणद्वितीयमानस्य समकोणद्वयाधिकत्वाद्वा द्वितीयमानासंभवः ।

इदं पार्श्ववर्तिक्षेत्रस्थितेः सम्यगवगम्यते ।

कल्प्यताम् आकागा-त्रिभुजे आगा-भुजात् कागा-भुजोऽस्य इति । तदा गा-केन्द्रं मत्वा गाका-ज्यासार्धेन काका अपि कृते स आका रेखायां आ बिन्दोः का-दिशेष द्वितीयस्थाने लगति । तथा चोपेष्टावयवविशिष्टं त्रिभुजद्वयं सं-



पद्यते । तत्र का-कोणस्य द्वे माने अन्योऽन्यस्पर्धिनी स्पष्टं दृश्येते ।

अथ यदि आगा-भुजात् कागा-भुजो महान् स्यात् तदा आ-विन्दोर्यस्यां दिशि का-विन्दुर्वर्तते तदन्यदिशि काका-चापस्य आका-रेखया द्वितीयसंपातः स्यात् । तथा च द्वितीयज्यस्त्रस्यासंभवात् का-कोणद्वितीयमानासंभवः ।

एवं यदि काका-चापः आका-रेखां स्पृशेदेव तदा आगा-भुजात् कागा-भुजस्याल्पत्वेऽपि का-कोण एकविध एव भवेत् । यदि च काका-चापः आका-रेखां न स्पृशेन्न वा छिन्यात् तदा आकागा-त्रिभुजासंभवात् तदुद्दिष्टं खिलं स्यात् ।

उदा० (१) अ = १० । क = १७ । आ = २८° । ४' । २१"

तदा शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघाट्याका = प्रघाट्याआ + प्रघाटक - प्रघाटअ

$$= ९६७२६४११ + १२३०४४८९ - १०००००००$$

$$= ९९०३०९०० = प्रघाट्या५३° । ७' । ४८'४"$$

$$\text{वा} \quad = प्रघाट्या १२६° । ५२' । ११'६"$$

अत्र क-भुजात् अ-भुजोऽल्पो भवति

$$\text{अतः} \quad का = ५३° । ७' । ४८'४" \text{ वा } १२६° । ५२' । ११'६"$$

एवमिह का-मानं द्विविधं भवति ।

$$\therefore \quad गा = ९८° । ४७' । ५०'६" \text{ वा } २५° । ३' । २७'४"$$

अथ च प्रघाटग = प्रघाट्यागा + प्रघाटअ - प्रघाट्याआ

$$= प्रघाट्या (९८° । ४७' । ५०'६") + प्रघाटअ - प्रघाट्याआ$$

$$= ९९९४८६०४ + १००००००० - ९६७२६४११$$

$$= १३२२२१९३ = प्रघाट२१ . ग = २१$$

पद्मा प्रघाट्या (२५° । ३' । २७'४") + प्रघाटअ - प्रघाट्याआ

$$= ९६२६८८३६ + १००००००० - ९६७२६४११$$

$$= ०९५४२४२५ = प्रघाट९ . ग = ९ ।$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः  $\begin{cases} \text{का} = ५३^{\circ} ७' ४८'' \\ \text{गा} = ९८^{\circ} ४७' ५०'' \text{ वा } २५^{\circ} ३' २७'' \\ \text{ग} = २१ \text{ वा } ९। \end{cases}$

उदा० (२) अ = १५। क = १३। आ = ६७°। २२'। ४८'५''  
शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः।

अत्र प्रघाट्याका = प्रघाट्याआ + प्रघाटक - प्रघाटअ  
= ९९६५२३७९ + १११३९४३४ - ११७६०९१३  
= ९९०३०९०० = प्रघाट्या ५३°। ७'। ४८'४''

∴ का = ५३°। ७'। ४८'४''।

अत्र क-भुजात् अ-भुजो महानस्ति। अतोऽत्र का-मानमेकविधमेव।

∴ गा = ५९°। २९'। २३'१''।

ततः प्राग्बत् ग = १४।

तृतीयः प्रकारः—

यदा त्रिभुजे भुजौ क, ग, तयोरन्तर्गतकोणश्च आ इति ज्ञायते।

तदा (३६) प्रक्रमतः  $\frac{क + ग}{क - ग} = \frac{\text{स्प } \frac{१}{२} (का + गा)}{\text{स्प } \frac{१}{२} (का - गा)}$

∴ स्प  $\frac{१}{२} (का - गा) = \frac{क - ग}{क + ग} \times \text{स्प } \frac{१}{२} (का + गा)$

परन्तु  $\frac{१}{२} (का + गा) = ९० - \frac{१}{२} आ।$

∴ स्प  $\frac{१}{२} (का - गा) = \frac{क - ग}{क + ग} \times \text{कोस्प } \frac{१}{२} आ।$

अस्य प्रपातमापकरूपमिदम्।

प्रघाटस्प  $\frac{१}{२} (का - गा)$   
= प्रघाटकोस्प  $\frac{१}{२} आ + प्रघाट(क - ग) - प्रघाट(क + ग)$  एवम-  
ज्ञातकोणयोरन्तरार्धं ज्ञायते तयोर्योगार्धं तु ज्ञातकोणा-ज्ञातमेवास्ति

$$का = \frac{१}{२} (का + गा) + \frac{१}{२} (का - गा) ।$$

$$गा = \frac{१}{२} (का + गा) - \frac{१}{२} (का - गा) ।$$

प्रथमज्ञातकोणौ ज्ञायेते ।

ततः प्रथमप्रकारेण तृतीयभुजज्ञानं सुलभम् ।

अथात्र यद्यदिष्टावयवैः क्षेत्रकोणनिरपेक्षमेव तृतीयभुजज्ञानमिष्टं तदा तत् (३८) प्रक्रमोक्ताऽस्मात्  $अ^२ = क^२ + ग^२ - २कग \cdot कोज्याआ$ , समीकरणजज्ञायते । परं न ह्यस्य समीकरणस्य प्रघातमापकरूपं संपद्यत इतीदं समीकरणं तथा परिणाम्यते यथाऽस्मात् प्रघातमापकद्वारा तृतीयभुजज्ञानं स्यात् स परिणामो द्वित्रिधः ।

तत्रादावाद्यः प्रदर्श्यते—

$$\begin{aligned} (प, १) \quad अ^२ &= क^२ + ग^२ - २कग \cdot कोज्याआ \\ &= क^२ - २कग + ग^२ + २कग (१ - कोज्याआ) \\ &= (क - ग)^२ + ४कग \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ \\ &= (क - ग)^२ \left\{ १ + \frac{४कग}{(क - ग)^२} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ \right\} \end{aligned}$$

अत्र  $\frac{४कग}{(क - ग)^२} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ$ , इदं धनमस्ति । अतस्तत्स्थाने

(स्प'इ) पश्यते तदा

$$अ^२ = (क - ग)^२ (१ + स्प'इ) = (क - ग)^२ छे'इ ।$$

$$\therefore अ = (क - ग) छेइ ।$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्

$$प्रघादअ = प्रघाद(क - ग) + प्रघादछेइ - १० ।$$

$$अथ \therefore स्प'इ = \frac{४कग}{(क - ग)^२} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ$$



$$\therefore \text{स्पइ} = \frac{२\sqrt{\text{कग}}}{\text{क} - \text{ग}} \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ आ ।}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्

$$\begin{aligned} \text{प्रघाटस्पइ} &= \text{प्रघाट२} + \frac{१}{२} \text{ प्रघाटक} + \frac{१}{२} \text{ प्रघाटग} \\ &+ \text{प्रघाटज्या } \frac{१}{२} \text{ आ} - \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग}) \end{aligned}$$

एवम् (इ) माने ज्ञाते ततः

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग}) + \text{प्रघाटछेइ} - १० ।$$

अस्मिन् परिणामे यदि (क - ग) अल्प स्यात् तदा (स्पइ) महत् स्यात् ततो लब्धम् (इ) मानं स्थूलं स्यात् ततः (क) मानमपि स्थूलं स्यात् ।

अथातो द्वितीयपरिणाम उच्यते—

$$\begin{aligned} (\text{प}_२) \text{अ}^२ &= \text{क}^२ + \text{ग}^२ - २\text{कग कोज्याआ} \\ &= \text{क}^२ + २\text{कग} + \text{ग}^२ - २\text{कग}(१ + \text{कोज्याआ}) \\ &= (\text{क} + \text{ग})^२ - ४\text{कग कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} \end{aligned}$$

$$= (\text{क} + \text{ग})^२ \left\{ १ - \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} \right\}$$

अथ यतः (क + ग)<sup>२</sup> अस्मात् (४कग) इदं सदैवालपं भवति ।

$$\text{अतः } \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ इदं रूपावत्वं स्यात्}$$

$$\therefore \text{कल्प्यताम्— } \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} = \text{ज्या}^२ \text{इ}$$

$$\text{तदा अ}^२ = (\text{क} + \text{ग})^२ (१ - \text{ज्या}^२ \text{इ}) = (\text{क} + \text{ग})^२ \text{ कोज्या}^२ \text{इ}$$

$$\therefore \text{अ} = (\text{क} + \text{ग}) \text{ कोज्याइ ।}$$

अथ ज्याइ, अ, अनयोर्मानयो. प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघाट्याइ} = \text{प्रघाट} २ + \frac{१}{२} \text{प्रघाटक} + \frac{१}{२} \text{प्रघाटग} \\ + \text{प्रघाट}(\text{कोट्या } \frac{१}{२} \text{ आ}) - \text{प्रघाट}(\text{क} + \text{ग}) ।$$

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाट}(\text{क} + \text{ग}) + \text{प्रघाटकोट्याइ} - १० ।$$

$$\text{तदा० । क} = ८२ । \text{ग} = २१ । \text{आ} = १०२^{\circ} । ४०' । ४९'४'' \text{ तदा}$$

शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{अत्र प्रघाटस्प } \frac{१}{२}(\text{का} - \text{गा}) &= \text{प्रघाटकोस्प } \frac{१}{२} \text{ आ} \\ &+ \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग}) - \text{प्रघाट}(\text{क} + \text{ग}) \\ &= \text{प्रघाटकोस्प } (५१^{\circ} । २०' । २४'') + \text{प्रघाट} ६१ - \text{प्रघाट} १०३ \\ &= ९^{\circ} ९०३०९०० + १^{\circ} ७८५३२९८ - २^{\circ} ०१२८३७२ \\ &= \begin{cases} + ११^{\circ} ६८८४१९८ \\ - २^{\circ} ०१२८३७२ \end{cases} \\ &= + ९^{\circ} ६७५५८२६ = \text{स्प } २५^{\circ} । २१' । ३५'' । \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{१}{२}(\text{का} - \text{गा}) = २५^{\circ} । २१' । ३५'' ।$$

$$\text{अथ च } \frac{१}{२}(\text{का} + \text{गा}) = ९०^{\circ} - \frac{१}{२} \text{आ} = ३८^{\circ} । ३९' । ३५'३''$$

$$\therefore \text{का} = ६४^{\circ} । ०' । ३८'८''$$

$$\text{गा} = १३^{\circ} । १८' । ३१'८'' ।$$

अतः प्रथमप्रकारेण सिद्धस्तृतीयभुजः अ = ८९ ।

अथाद्यपरिणामवस्तृतीयभुजज्ञानार्थं न्यासः ।

$$\text{प्रघाटस्पइ} = \text{प्रघाट} २ + \frac{१}{२} \text{प्रघाटक} + \frac{१}{२} \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोट्या } \frac{१}{२} \text{ आ} \\ - \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग})$$

$$\begin{aligned} &= ३०१०३०० + ६६११०९६५ + ९५६९०६९५ + ९^{\circ} ८९२५७८१ \\ &\quad - १^{\circ} ७८५३२९८ \\ &= ११^{\circ} ८११६२४७ - १^{\circ} ७८५३२९८ = १०^{\circ} ०२६२९४९ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{स्प} ( ४६^{\circ} | ४४' | ४७'' ) \therefore \text{इ} = ४६^{\circ} | ४४' | ४७'' \\
 \text{अथ प्रघाट} &= \text{प्रघाट} ( क - ग ) + \text{प्रघाट} \text{इ} - १० \\
 &= १^{\circ} ७८५३२९८ + १०^{\circ} १६४०६०२ - १० \\
 &= १^{\circ} ९४९३९०० = \text{प्रघाट} ८९ \therefore \text{अ} = ८९
 \end{aligned}$$

सिद्धस्तृतीयभुजः स एव ।

एवं द्वितीयपरिणामतोऽपि स एव भुजो लभ्यते ।

चतुर्थः प्रकारः—

यदा त्रिभुजस्य त्रयो भुजाः ( अ, क, ग ) ज्ञाता भवन्ति तदा आ-कोणज्ञानमधोलिखिताभिदन्मितिभिः प्रत्येकं जायते ।

$$\text{ग्याआ} = \frac{२}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \quad (१)$$

$$\text{ग्याइआ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}}} \quad (२)$$

$$\text{फोग्याइआ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}}} \quad (३)$$

$$\text{स्पइआ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}} \quad (४)$$

अत्र प्रथमोन्मितेरुपपत्तिः (३९)प्रक्रमे द्रष्टव्या द्वितीयादीनां च (४०)प्रक्रमे विद्येय्या ।

अथ यदा आ-कोणः समकोणमग्नौ न स्यात् तदा प्रथमोन्मिते-  
स्तदानीयनं कर्तुं युज्यते यतः समकोणासन्नकोणाग्याया धनुः सार-  
लीनः सुद्धमं न लभ्यते ।

यदा आ-कोणः समकोणाग्नः स्यात् तदा द्वितीयतृतीयो-  
न्मितिरूपे प्रत्येकं तदानीयनं कर्तुं युज्यते ।

यदा आ कोण\* समकोणद्वयासन्नो न स्यात् तदा चतुर्थोन्मिते-  
स्तदानयनं कर्तुं युज्यते ।

अथासामुन्मितीनां क्रमेण प्रघातमापकरूपाणि ।

$$(१) \text{ प्रघाट्या आ} = १० + \text{प्रघाट्} २ + \frac{१}{२} \left\{ \text{प्रघाट्स} + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{अ}) \right. \\ \left. + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{क}) + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{ग}) \right\} - (\text{प्रघाट्क} + \text{प्रघाट्ग}) ।$$

$$(२) \text{ प्रघाट्या } \frac{३}{२} \text{ आ} = \frac{३}{२} \left\{ २० + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{क}) + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{ग}) \right. \\ \left. - (\text{प्रघाट्क} + \text{प्रघाट्ग}) \right\} ।$$

$$(३) \text{ प्रघाट्कोज्या } \frac{३}{२} \text{ आ} = \frac{३}{२} \left\{ २० + \text{प्रघाट्स} + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{अ}) \right. \\ \left. - (\text{प्रघाट्क} + \text{प्रघाट्ग}) \right\} ।$$

$$(४) \text{ प्रघाट्स्व } \frac{३}{२} \text{ आ} = \frac{३}{२} \left\{ २० + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{क}) \right. \\ \left. + \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{ग}) - \text{प्रघाट्स} - \text{प्रघाट्}(\text{स} - \text{अ}) \right\} ।$$

साजात्यात् का गा-कोणयोरपि माने एव ज्ञातुं शक्यते ।

उदा० । यत्र त्रिभुजे अ = २५ । क = १७ । ग = २८ ।

तत्र त्रय\* कोणा किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रथमोन्मित्योत्तरावगमाय न्यासः ।

$$\text{स} = \frac{३}{२} (२५ + १७ + २८) = ३५ ।$$

$$\text{स} - \text{अ} = १० ।$$

$$\text{स} - \text{क} = १८ ।$$

$$\text{स} - \text{ग} = ७ ।$$

अथ च

$$\begin{aligned} \text{प्रधाद्व्यासा} &= १० + \text{प्रधाद्वर} + \frac{१}{३} \left\{ \text{प्रधाद्वस} + \text{प्रधाद्व(स - अ)} \right. \\ &+ \text{प्रधाद्व(स - क)} + \text{प्रधाद्व(स - ग)} - (\text{प्रधाद्वक} + \text{प्रधाद्वग}) \left. \right\} \\ &= १० + ३०१०३०० \\ &+ \frac{१}{३} \left\{ १५४४०६८० + १००००००० + १२५५२७२५ + ८४५०९८० \right\} \\ &- (१२३०४४८९ + १४४७१५८०) \\ &= १०३०१०३०० + २३२२२१९३ - २६७७६०६९ \\ &= ९९४५६४२४ = \text{प्रधाद्व्यासा} (६१^{\circ} ५५' ३९'') । \end{aligned}$$

$$\therefore \text{आ} = ६१^{\circ} ५५' ३९'' ।$$

$$\text{ततः प्रथमप्रकारेण सिद्धम् का} = ३६^{\circ} ५२' १२'' ६५'' ।$$

$$\therefore \text{गा} = ८१^{\circ} १२' ९'' ३५'' ।$$

अध्यासार्थमुदाहरणानि ।

उद्दिष्टान्वयवाः ।

शेषावयवाः ।

$$\begin{aligned} \text{आ} &= ५०० \\ (१) \text{ आ} &= ८५^{\circ} ४७' \\ \text{का} &= ५७^{\circ} २५' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{आ} &= ५०० \\ \text{आ} &= ८५^{\circ} ४७' \\ \text{का} &= ५७^{\circ} २५' \end{aligned}} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{गा} &= ३६^{\circ} ४८' \\ \text{क} &= ४२२^{\circ} ४४८१ \\ \text{ग} &= ३००^{\circ} ३२४७ \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{अ} &= ३२७ \\ (२) \text{ का} &= २६^{\circ} ८' ५५'' \\ \text{गा} &= २३^{\circ} ३२' ५'' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{अ} &= ३२७ \\ \text{का} &= २६^{\circ} ८' ५५'' \\ \text{गा} &= २३^{\circ} ३२' ५'' \end{aligned}} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{आ} &= १३०^{\circ} १९' \\ \text{क} &= १२९ \\ \text{ग} &= १७१^{\circ} २४७३ \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{अ} &= ८५ \\ (३) \text{ क} &= १०० \\ \text{आ} &= ३७^{\circ} १२९' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{अ} &= ८५ \\ \text{क} &= १०० \\ \text{आ} &= ३७^{\circ} १२९' \end{aligned}} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{का} &= ४५^{\circ} ४३' ६६'' \text{ वा} \\ &= १३४^{\circ} १६' ५३'' ४'' \\ \text{गा} &= ९६^{\circ} ४७' ५३'' ४'' \text{ वा} \\ &= ८^{\circ} १४' ६६'' \\ \text{ग} &= १३८^{\circ} ६९८७ \text{ वा} \\ &= २०^{\circ} ००७३६ \end{aligned} \right.$$

उदितवयवाः ।

शेषवयवाः ।

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ८५ \\ (४) \text{ क} = २०२ \\ \text{आ} = ११^{\circ} २५' १६'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = २८^{\circ} ४' २१'' \text{ वा} \\ = १५१^{\circ} ५५' ३९'' \\ \text{गा} = १४^{\circ} ०' ३०' २३'' \text{ वा} \\ = १६^{\circ} ३९' ५'' \\ \text{ग} = २७३ \text{ वा} \\ = १२३ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ८९ \\ (५) \text{ क} = ६५ \\ \text{आ} = ३६^{\circ} ५२' ११'' ६'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = २५^{\circ} ५९' २१'' २५'' \\ \text{गा} = ११^{\circ} ७' ८' २७'' १५'' \\ \text{ग} = १३२ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क} = १२५ \\ (६) \text{ ग} = १५० \\ \text{आ} = ३०^{\circ} \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ५५^{\circ} १०' २'' \\ \text{गा} = ९४^{\circ} ४९' ५८'' \\ \text{अ} = ७६'' १४३ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १३ \\ (७) \text{ क} = २० \\ \text{गा} = ७५^{\circ} ४५' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ३६^{\circ} ५२' १२'' \\ \text{का} = ६७^{\circ} २२' ४८'' \\ \text{ग} = २१ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १०० \\ (८) \text{ क} = १०१ \\ \text{ग} = १०२ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ५९^{\circ} १' २०'' \\ \text{का} = ५९^{\circ} ५९' २५'' \\ \text{ग} = ६०^{\circ} ५९' १५'' \end{array} \right.$$

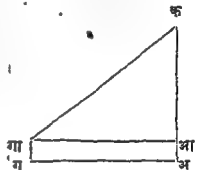
$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ३७ \\ (९) \text{ क} = १५ \\ \text{ग} = ४४ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ५३^{\circ} ७' ४८'' १'' \\ \text{का} = १८^{\circ} ५५' २८'' ७'' \\ \text{गा} = १०७^{\circ} १६' ४३'' \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ३४२०२०१ \\ (१०) \text{ क} = ८६६०२५४ \\ \text{ग} = ९८४८०७८ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = २०^{\circ} \\ \text{का} = ६०^{\circ} \\ \text{गा} = १००^{\circ} \end{array} \right.$$

५७ । अजात्यज्यस्य शेषावयवाजात्यज्यस्यगणितेनापि ज्ञातुं शक्यन्ते किन्तु तत्रेष्टकोणात् तत्संमुखभुजे लम्बं निपात्य द्वे ज्यस्यो उत्पादनीये भवत इति विशेषः ।

५८ । अथ त्रिकोणमितेर्यथा वंशगृहपर्वतादीनामौ-  
च्छस्य तत्स्वान्तरस्य चावगमः स्यात् तथोच्यते । तदर्थमादौ  
कस्यचित् सरलप्रदेशस्य दैर्घ्यं कतिपयकोणानां च मानं  
चावश्यमवगम्यं भवति । तत्र प्रदेशदैर्घ्यं तु रज्ज्वा सरलपट्या  
वा गणयन्ति कोणांश्च तुरीयपट्टादियन्त्रैः ।

उदा० (१) । यदि कस्यचित् ( अक ) सरलवंशस्यौच्छ्यं ज्ञातव्यं  
तदा ( अ ) स्थानात् समानभूमौ सरलयष्ट्वा ( अग ) प्रदेशं गणयित्वा  
( ग ) स्थानात् ( क ) वंशामस्योन्नतिं  
तुरीयेण पट्टेन वा विद्वयेत् तदा यदि  
( अग ) दैर्घ्यं ( अ ) तुल्यं स्यात् ।  
( क ) स्य उन्नतिश्च ( क° ) स्यात्  
( गगा ) दृष्ट्युच्छ्रितिश्च ( ग ) स्यात्  
तदा ( प्रक० ५० प्रका० २ )



$$\text{आक} = \text{आगा-स्प} \angle \text{आगाक} = \text{अग-स्प} \angle \text{आगाक} \\ = \text{अ-स्पक}$$

$$\therefore ( \text{अक} ) \text{ औच्छ्यम्} = \text{अ-स्पक} + \text{ग} \\ \text{एवमौच्छ्यं ज्ञायते ।}$$

एवं दृक्समसूत्रादुच्छतरवस्तुनो गणितागतमौच्छ्यमानं दृष्ट्यु-  
च्छ्रायेणाधिकं वास्तवं भवति । दृक्समसूत्रादधस्तनवस्तुनो गणितागतं  
मानं च दृष्ट्युच्छ्रायेण विद्वलेपितं वास्तवं भवतीति ।

यद्यत्र अ = २५ हस्ताः । क = ३०° । ग = ३३ हस्ताः

तदा आक = २५ × स्प३०°

वा प्रघाटआक = प्रघाट२५ + प्रघाटस्प३०° - १०

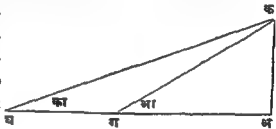
$$= १३९७९४०० + ९७६१४३९४ - १०$$

$$= ११५९३७९४ = प्रघाट१४°४३३७६$$

∴ वंशौच्छयम् = १४°४३३७६ + ३५ = १७°९३३७६ हस्ताः ।

उदा० (२) समानभूमौ वर्तमानस्य कस्थचित् प्रासादस्यौच्छयं (अक), दूरत्वम् (अग) चावगम्यम् ।

अत्र कल्प्यताम् (ग)-स्थानात् (क) अप्रवेधे लब्धा अंशाः (आ) । ततः (अ)-भूलाघस्यां दिशि (ग)-स्थानं वर्तते तस्यामेव दिशि (ग)-स्थानात् (घ)-स्थानपर्यन्तम् (अ)-हस्त-मितदेशं गत्वा (घ)-स्थानात् पुनः (क) अप्रवेधे लब्धा अंशाः (का) इति ।



तत्र यदि औच्छयं (अक) = य, दूरत्वम् (अग) = र

$$\text{तदा (३६ प्र०) } \frac{\text{कग}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याकघग}}{\text{ज्याकघ}} = \frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\text{कग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\text{य} = (\text{कग.ज्याआ}) = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\text{एषम् } \text{र} = \text{कग.कोज्याआ} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$



५७ । अजात्यज्यस्य शेषावयवाजात्यज्यस्रगणितेनापि ज्ञातुं शक्यन्ते किन्तु तत्रेष्टकोणात् तत्संमुखश्रुजे लम्बं निपात्य द्वे ज्यस्रे उत्पादनीये भवत इति विशेषः ।

५८ । अथ त्रिकोणमितीर्यथा वंशगृहपर्वतादीनामौ-  
च्छस्य तत्स्वान्तरस्य चावगमः स्यात् तयोच्यते । तदर्थमादौ  
कस्य चित् सरलप्रदेशस्य दैर्घ्यं कतिपयकोणानां च मानं  
चावश्यमवगम्यं भवति । तत्र प्रदेशदैर्घ्यं तु रज्ज्वा सरलपट्या  
वा गणयन्ति कोणांश्च तुरीयपट्टादियन्त्रैः ।

उदा० (१) । यदि कस्यचित् ( अक ) सरलवंशस्यौच्छ्यं ज्ञातव्यं  
तदा ( अ ) स्थानात् समानभूमौ सरलपट्या ( अग ) प्रदेशं गणयित्वा  
( ग ) स्थानात् ( क ) वंशाम्बोज्ज्वलिं  
तुरीयेण पट्टेन वा विद्वपेत् तदा यदि  
( अग ) दैर्घ्यं ( अ ) तुल्यं स्यात् ।  
( क ) स्य उन्नतिश्च ( क० ) स्यात्  
( गगा ) दृष्ट्युच्छ्रितिश्च ( ग ) स्यात्  
तदा ( प्रक० ५० प्रका० २ )



आक = आगा.स्प  $\angle$  आगाक = अग.स्प  $\angle$  आगाक  
= अ.स्पक

∴ ( अक ) औच्छ्यम् = अ.स्पक + ग  
एवमौच्छ्यं ज्ञायते ।

एवं एकसमसूत्रादुच्चतरवस्तुनो गणितागतमौच्छ्यमानं दृष्ट्यु-  
च्छ्रायेणाधिकं वास्तवं भवति । एकसमसूत्रादधस्तरवस्तुनो गणितागतं  
मानं दृष्ट्युच्छ्रायेण विलेपितं वास्तवं भवतीति ।

यद्यत्र अ = २५ हस्ताः । क = ३०° । ग = ३३ हस्ताः

तदा आक = २५ × स्प३०°

वा प्रघाटआक = प्रघाट२५ + प्रघाटस्प३०° - १०

$$= १३९७९४०० + ९७६१४३९४ - १०$$

$$= ११५९३७९४ = प्रघाट१४४३३७६$$

∴ वंशौच्च्यम् = १४४३३७६ + ३५ = १७९३३७६ हस्ताः ।

उदा० (२) समानभूमौ वर्त्तमानस्य कस्यचित् प्रासादस्यौच्च्यं (अक), दूरत्वम् (अग) चावगम्यम् ।

अत्र कल्प्यताम्, (ग)-स्थानात् (क) अग्रवेधे लब्धा अंशाः (भा) । ततः (अ)-मूलाद्यस्यां दिशि (ग)-स्थानं वर्त्तये तस्यामेव दिशि (ग)-स्थानात् (घ)-

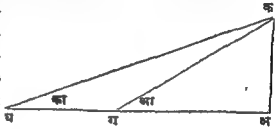
स्थानपर्यन्तम् (अ)-हस्त-

मितदेशं गत्वा (झ)-

स्थानात् पुनः (क)

अग्रवेधे लब्धा अंशाः

(का) इति ।



तत्र यदि औच्च्यं (अक) = य, दूरत्वम् (अग) = र

$$\text{तदा (३६ प्र०)} \quad \frac{\text{कग}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याकघग}}{\text{ज्यागकघ}} = \frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore \quad \text{कग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore \quad \text{य} = (\text{कग.ज्याआ}) = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\text{एवम्} \quad \text{र} = \frac{\text{का.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघादय} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्याआ} + \text{प्रघादज्याका} \\ - \text{प्रघादज्या(आ - का)} - १०।$$

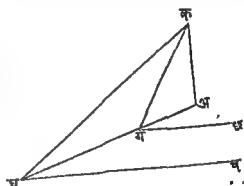
$$\text{प्रघादर} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादकोज्याआ} + \text{प्रघादज्याका} \\ - \text{प्रघादज्या(आ - का)} - १०।$$

$$यदीह— अ = ५०। आ = ३०°। २५'। का = १९°। ३५'।$$

तदोत्थापनेन सिद्धमौच्छ्यमानम्, य = ४५°१४३ हस्ताः।

तथा (ग)-स्थानात् दूरत्वम्, र = ७६°८९३ हस्ताः।

उदा० (३) कस्याश्चित् (अग) क्रमनिम्नोर्ज्या भूपृष्ठे प्रावर्ण्य  
(अघच) किल (आ) अंशाः, तथा (अघ) भूमौ वर्तमानस्य  
(अक) गृहादेरौच्छ्यदूरत्वयोरवगमाय तद्भूस्थेनैव द्रष्ट्वा (ग)-  
स्थानात् (क) अग्रवेधे कृते लब्धाः किलोन्नतांशाः (कगल) = (का)  
अंशाः, ततः (अग)  
दिश्येव (ग) स्थानात्  
(घ)-स्थान पर्यन्तम् (अ)  
हस्तमितदेश गत्वा पुनः  
(क) अग्रवेधे कृते लब्धाः  
किलोन्नतांशाः (कघच)  
= (गा)। तत्र यदि  
औच्छ्यम् (अक) =  
य, दूरत्वम् (अग) = र,



$$\text{तदा य} = \frac{\text{कग.ज्याअगक}}{\text{ज्याकअघ}} = \frac{\text{कग ज्या (का - आ)}}{\text{कोज्याआ}}$$

$$\text{परन्तु कग} = \frac{\text{अघ.ज्याकघग}}{\text{ज्याकअघ}} = \frac{\text{अ.ज्या(गा - आ)}}{\text{ज्या(का - गा)}}$$

$$\therefore y = \frac{\text{अ.ज्या(का - आ) - ज्या(गा - आ)}}{\text{कोज्याआ.ज्या(का - गा)}} . 1$$

$$\text{एवम् } r = \frac{\text{कग.ज्याअकग}}{\text{ज्याकअग}}$$

$$= \frac{\text{अ.ज्या(गा - आ) - कोज्याका}}{\text{ज्या(का - गा) - कोज्याआ}} . 1$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\begin{aligned} \text{प्रघाटय} &= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्या(का-आ)} + \text{प्रघाटज्या(गा - आ)} \\ &\quad - \text{प्रघाटकोज्याआ} - \text{प्रघाटज्या(का - गा)} . 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रघाटर} &= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्या(गा - आ)} + \text{प्रघाटकोज्याका} \\ &\quad - \text{प्रघाटज्या(का - गा)} - \text{प्रघाटकोज्याआ} . 1 \end{aligned}$$

यद्यत्र अ = ५० हस्ताः, आ = ३०°, का = ६२° । ३०', गा = ५०° । १५'

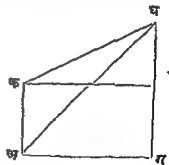
तदोत्थापनेन सिद्धमौच्छ्यमानम् य = ५०° ६०३ ।

एवम् (ग) दूरत्वमानम् र = ४३° ४८८ ।

उदा० (४) समभूस्थमवगतौच्छ्यमल्पपर्वतमाकृष्ट भूस्थसरलधं-

शस्याप्रमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसू-  
त्रादधरांशान्\*विदूष्या तद्वंशस्यौ-  
च्छ्यमानं ज्ञातव्यम् ।

यथाऽत्र किल (गघ)-पर्वतौ-  
च्छ्यम् = अ । (घ)-स्थानात् (अक)-  
वंशस्य मूलामवेधे लब्धे क्रमेणाध-  
रांशमाने (घअग) = आ, (घअच) =  
का । (अक) वंशौच्छ्यम् = य



\* पर्वतामास्तम्बरूप कीलकार्पं पश्यन् समभूस्थितवंशमूलं यष्ट्या  
विदूषेत् । एवं तद्वंशाग्रमपि । तत्र दृष्टिलग्नं कीलकाग्रयष्ट्युत्पन्न-  
कोणकोट्यंशा एवाधरांशा इति ।

$$\text{तदा } \frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{१}{\text{ज्याअघ}} = \frac{१}{\text{ज्याआ}} \therefore \text{अघ} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \cdot १$$

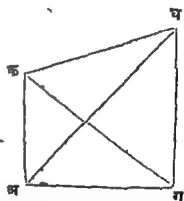
$$\text{एवम् } \frac{\text{अक}}{\text{अघ}} = \frac{\text{ज्याअघक}}{\text{ज्याअकघ}} = \frac{\text{ज्या(आ - का)}}{\text{कोज्याका}} \cdot १$$

$$\therefore \text{अक} = \text{घ} = \frac{\text{अ ज्या(आ - का)}}{\text{ज्याआ.कोज्याका}} \text{अस्य प्रघातमापकरूपं} *$$

सुगमतरम् ।

उदा० (५) अज्ञातौ च्छ्याल्पपर्वतशिखरमारुह्य समभूरियतयोरव-  
गतान्तरयोर्वृक्षमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसूत्रादधरांशमाने द्रष्टुर्वृक्षमूलप-  
र्वन्तयोर्दृक्सूत्रयोरन्तर्गतकोणं चावगत्य तत्पर्वतौ च्छ्यं कथमवगम्य-  
मिति प्रश्नः ।

यथा किलात्र अ, क वृक्षमू-  
लयोरन्तरं, अक = अ । (गघ) पर्व-  
तस्य (घ)-शिखरे स्थित्वा अ,  
क मूलयोर्वेधे कृते लब्धे क्रमेण  
दृक्समसूत्रादधरांशमाने आ, का  
तथा  $\angle$  अघक = गा, (गघ)  
पर्वतौ च्छ्यम् = य,



तदा अकघत्रिभुजे अघ = य.कोछेआ, कघ = य.कोछेका †

\* प्रघादय = प्रघादअ + प्रघादज्या(आ - का) - प्रघादज्याआ  
- प्रघादज्याका, एतत् तु सुगमतरमत एव यतस्त्वत्र पर्वतौ च्छ्याधरांश-  
मानकल्पनमपि सुगमम् ।

† त्रिभुजे भुजत्रयमानेषु हातेषु यस्य कोणस्य कोटिज्याऽपेक्ष्यते  
( ३८ ) प्रक्रमतस्त्वत्कोणात्पादकभुजत्रययोगस्तत्कोणसंमुखभुजवर्गान-

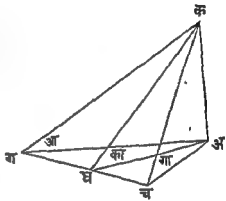
∴ अ<sup>२</sup>

$$= य^२ \cdot कोछे^२ आ + य^२ \cdot कोछे^२ का - २य^२ \cdot कोछे आ \cdot कोछे का \cdot कोज्यागा ।$$

$$\therefore य = \frac{अ}{\sqrt{कोछे^२ आ + कोछे^२ का - २कोछे आ \cdot कोछे का \cdot कोज्यागा}} इत्युत्तरम् ।$$

उदा० (६) (अगच) समभुवि स्थितस्य (अक)-वंशादेः (क)

अग्रे (गच) सरलरेखास्थेषु  
ग, घ, च, स्थानेषु स्थित्वा  
विष्टे लब्धाः क्रमेणांशाः  
आ, का, गा, । एवं (गघ)  
(घच) रेखयोर्गणने लब्धा  
इस्ताः अ, क । अत्रैभ्यः  
(अक) वंशादेरौच्छ्रयमव-  
गम्यम् ।



तदा कल्प्यतामत्र (अक)  
औच्छ्रयम् = य

$$\therefore अग = य \cdot कोत्पआ, अघ = य \cdot कोत्पका, अच = य \cdot कोत्पगा ।$$

$$अत्र यतः कोज्याअग = \frac{अघ^२ + गघ^२ - अच^२}{२अघ \cdot गघ}$$

$$कोज्याअघच = \frac{अघ^२ + घच^२ - अच^२}{२अघ \cdot घच} ।$$

$$इवम् कोज्याअघग = - कोज्याअघच$$

स्तन्निर्दिष्टकोणात्पादकभुजघातेन द्विगुणेन भक्तस्तत्कोणकोटिज्या

$$यथा— कोज्यागा = \frac{अघ^२ + कघ^२ - अ^२}{२अघ \cdot कघ} अतः स्थापनेन ।$$

$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घघ}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{घच}} *$$

अत्रत्यपदानि पूर्वसाधितैस्तत्तदुन्मानैरुत्थाप्य समीक्रियया लब्ध-  
सौच्च्यमानम्,

$$य = \sqrt{\frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क}\text{कोस्प}^2\text{भा}}}$$

उदा० (७) पारेनदि दुर्गमस्थाने वर्त्तमानयोः अ, क वृक्षयोरेन्तर-

$$* \therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घघ}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{घच}},$$

$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घघ}^2}{\text{घच}},$$

$$\therefore \text{अघ}^2 \text{ घच} + \text{गघ}^2 \text{ घच} - \text{अग}^2 \text{ घच} = \text{अच}^2 \text{ गघ} - \text{अघ}^2 \text{ गघ} - \text{घघ}^2 \text{ गघ},$$

$$\therefore \text{गघ}^2 \text{ घच} + \text{घघ}^2 \text{ गघ} = \text{गघ} \text{ घच} (\text{गघ} + \text{घच}) = \text{अक}(\text{अ} + \text{क})$$

$$= \text{अच}^2 \text{ गघ} + \text{अग}^2 \text{ घच} - \text{अघ}^2 \text{ घच} - \text{अघ}^2 \text{ गघ}$$

$$= \text{गघ}(\text{अच}^2 - \text{अघ}^2) - \text{घच}(\text{अघ}^2 - \text{अग}^2)$$

$$= \text{गघ}(\text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{गा} - \text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{का}) - \text{घच}(\text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{का} - \text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{भा})$$

$$= \text{य}^2 (\text{गघ कोस्प}^2\text{गा} - \text{गघ कोस्प}^2\text{का} - \text{घच कोस्प}^2\text{का} + \text{घच कोस्प}^2\text{भा})$$

$$= \text{य}^2 (\text{अ कोस्प}^2\text{गा} - \text{अ कोस्प}^2\text{का} - \text{क कोस्प}^2\text{का} + \text{क कोस्प}^2\text{भा})$$

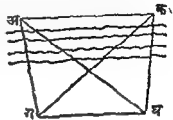
$$= \text{य}^2 (\text{अ कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क कोस्प}^2\text{भा}) = \text{अक}(\text{अ} + \text{क})$$

$$\therefore \text{य}^2 = \frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क कोस्प}^2\text{भा}} \quad \text{पुनस्तद्}$$

(य) मानमाकरो स्पष्टम् ।

† अघ, अग, अच, गघ, घच इमानि स्वरूपाणि ।

प्रदेशस्यावगमाय तत्समभूदेशोऽवाप्तीरे (गघ)-रेखाम् (अ)-हस्तमितां  
गणयित्वा (ग)-स्थानात् गणितयोः  
(अगघ), (कगघ) कोणयोः  
क्रमेणांशाः (आ, का) ततः (घ)-  
स्थानाच्च (कघग), (अघग)  
कोणयोः क्रमेणांशाः (गा, घा) एभ्यः  
(अ, क) दृक्षयोरन्तरमवगम्यम् ।



तदा (अगघ) त्रिभुजात् सिद्धम्  $\frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याअगघ}}{\text{ज्यागअघ}}$

$$\therefore \text{अघ} = \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\text{ज्या(आ + घा)}} ।$$

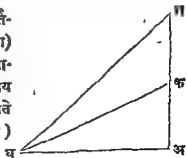
एवमेव (कगघ) त्रिभुजात् सिद्धम्  $\text{कघ} = \frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्या(का + गा)}} ।$

एवम् (अघ), (कघ) भुजौ तदन्तर्गतः (अघक) कोणश्चैतेभ्यः  
(अक) भुजावगमः (३८) प्रक्रमतः सुगमः ।

तथा हि—  $\text{अक}^2 = \text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - २\text{अघ.कघ.कोज्याअघक}$

$$\therefore \text{अक} = \sqrt{\text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - २\text{अघ.कघ.कोज्या(गा - घा)}} ।$$

उदा० (८) (घअ) समभुवि वर्त-  
मानस्य (अकग) गृहादेः (अक), (कग)  
प्रदेशौ क्रमेण अ, क हस्तपरिमिता-  
वगमौ । तत्र तद्गृहादेर्दूरत्वावगमाय  
(घ) स्थानात् (कघग) कोणे मापिते  
लब्धा अंशाः (आ) तथा घ (घअ)  
दूरत्वं कियत् स्यादिति प्रश्नः





अत्र किल य = घअ-प्रदेशहस्ताः ।

$$\text{तदा स्पकषण} = \text{स्प}(\text{अघण} - \text{अघक}) = * \frac{\text{स्पअघण} - \text{स्पअघक}}{१ + \text{स्पअघण} \text{स्पअघक}}$$

$$\text{परमत्र स्पअघण} = \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}}, \text{स्पअघक} = \frac{\text{अ}}{\text{य}}$$

$$\therefore \text{उत्थापनेन, स्पआ} = \frac{\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}} - \frac{\text{अ}}{\text{य}}}{१ + \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{य}}} = \frac{\text{कय}}{\text{य}^2 + \text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$$

अस्मात् समीकरणतो लब्धं (य) मानम्

$$= \frac{\text{क} \pm \sqrt{\text{क}^2 - ४\text{अ}(\text{अ} + \text{क}) \text{स्प}^2\text{आ}}}{२\text{स्पआ}}$$

अत्र (स्पआ) अस्य मानं यथा—  $\frac{\text{क}}{२\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}}$  अस्मा-

दूनं तेन समं वा ततोऽधिकं वा स्यात् तथा (य) मानं कनेण द्विविधमेकविधमसंभवं च बोध्यम् ।

तदेकविधमानं च  $\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$  एतत् स्यात् ।

एतत्प्रश्नोत्तर क्षेत्रमितिरीत्याऽपि ज्ञातित्यवगम्यते ।

तथा हि— (कग) रेखोपरि तथा वृत्तखण्डं कार्यं यथा तद्रेखायां घर्त्तमानः तत्खण्डपरिधिलग्नः कोणः (आ) अंशपरिमितः स्यात् । ततः (अ) स्थाने लम्बः कार्यः । तेन लम्बेन तद्वृत्तखण्डे छिन्ने स्पष्टेऽस्पष्टे वा (अघ) मानं द्विविधमेकविधमसंभवं वेति स्पष्टमवगतं स्यात् ।

अथ लम्बेन वृत्तखण्डे स्पष्ट एकविधम् (अघ) दूरत्वमानमिदं  $\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$  क्षेत्रमिति तृतीयाध्यायस्य षट्त्रिंशप्रतिज्ञया स्पष्टम् ।

अध्यासार्थमुदाहरणानि ।

(१)\* यस्यायतश्रेत्रस्य कोटिः ५० ( अ ) हस्ताः । तस्य कोट्येक-  
प्रान्ते स्थित्वा संमुखकोटिप्रान्तयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ३०°  
( आ ) तथा च तस्य भुजप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{भुजः} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पअ}} = ५०\sqrt{३} = ८६.६०२५४ \text{ हस्ता इत्युत्तरम् ।}$$

(२) पूर्वापरायताया भित्तेर्दक्षसूत्रादुच्छ्रितिः १५ ( अ ) हस्ताः ।  
तस्या भित्तेर्दक्षिणपाद्वर्षे ३५ ( क ) हस्तान्तरे देशे स्थित्वा भुवतारायां  
विलोकितायां सा भित्त्यूर्ध्वप्रान्तलम्ना दृष्टा तत्र तदानीं भुवोन्नतिः  
कियती स्यादिति प्रश्नः ।

$$\text{भुवोन्नतिः} = \text{स्प} - १ \frac{\text{अ}}{\text{क}} = २३^{\circ} ११' ५५'' \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(३) कस्यचिद्वंशादेरौच्छ्यावगमाय गणकस्तत्समभुवि सरलप्रदेशं  
२०० ( अ ) हस्तमितं गणयित्वा तत्प्रदेशैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य  
वंशाद्यप्रस्य चान्तर्गतकोणम् ५०° । १२' ( आ ) अंशमितं विध्वा तत्प्र-  
देशापरप्रान्ताच्च तदाद्यप्रान्तस्य वंशाद्यप्रस्य चान्तर्गतकोणम् ४०° ।  
२५' ( का ) अंशमितं वंशाद्यप्रस्य चोन्नतिम् ५७° । ४०' ( गा ) अंश-  
मितां ज्ञातवान् । तथा च तस्य वंशादेरौच्छ्यं कियत् स्यादिति प्रश्नः ।

\* सर्वेषां प्रश्नानां सोपपत्तकान्युत्तराणि प्रमाणे विलोकयानि ।

† यावतः कोणस्य चापस्य वा स्पर्शरेखा  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  स्यात् तावतो द्योतकं

स्प - १  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  एतत् स्यात् । एवं ज्या - १  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  । कोज्या - १  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  इत्यादीनि को-

ज्यादीनां कोणां व्यापान् वा द्योतयन्तीति ।

$$\text{वंशाद्यौर्च्यम्} = \frac{\text{अ-ज्याआ-ज्यागा}}{\text{ज्या(आ + का)}} = १२९.८४ \text{ हस्ताः ।}$$

( ४ ) पारेदुस्तरनदि किञ्चिद्गृहादि वर्त्तते तस्यावाक्तीराद्दूर-  
त्वावगमायावारतीरे १०० ( अ ) हस्तमितं तिर्यक्प्रदेशं विगणय्य  
तत्प्रदेशैकैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य गृहादेशचान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे  
क्रमेण कोणमाने ४०° । २५' ( आ ), ३७° । ४८' ( का ) तथा च तत्त-  
त्प्रदेशप्रान्तात् तद्गृहं कियति कियत्यन्तरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{प्रथमप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ-ज्याका}}{\text{ज्या( आ + का )}} = ६२.६१०१ \text{ हस्ताः ।}$$

$$\text{द्वितीयप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ-ज्याआ}}{\text{ज्या( आ + का )}} = ६६.२२९८२ \text{ हस्ताः ।}$$

( ५ ) कस्याश्चिद्दुस्तरनद्याः पात्रविस्तृत्यवगमायावाक्तीरे ६०  
( अ ) हस्तमितं तिर्यक् प्रदेशं विगणय्य तत्तत्प्रदेशप्रान्तात् तदपरप्रा-  
न्तस्य परतीरवर्त्तिनः कस्याचित् प्रस्तरादेश्चान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे  
क्रमेण कोणमाने ४२° । १७' ( आ ) । ५२° । ३५' ( का ) तथा च  
तस्या नद्याः कियती विस्तृतिरिति प्रश्नः ।

$$\text{नदीविस्तृतिः} = \frac{\text{अ-ज्याआ-ज्याका}}{\text{ज्या( आ + का )}} = ३२.१७७६८ \text{ हस्ताः ।}$$

( ६ ) काश्यां गङ्गापात्रे वर्त्तमानायाः कस्याश्चिन्महातरण्याः  
संमुखतटदेशवर्त्तिनि चत्वारिंशत् ( अ ) हस्तौर्च्ये गृहे स्थितेन मनु-  
जेन तद्गृहोर्ध्वतलदेशाभ्यां प्रत्येकं समसूत्रादधरांशा विद्धाः क्रमेण  
४०° । १५' ( आ ), २५° । ३०' ( का ) एतन्मिता लब्धाः । तथा च  
तद्गृहतलं गङ्गापात्रजलपृष्ठसमदेशात् कियत्यामुच्छ्रित्यां वर्त्तते तदु-  
च्छ्रितिदेशमूलाच्च सा महानौः कियति दूरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{चन्द्रिहतिः} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ-का)}} = १५^{\circ}६२२५६ \text{ हस्ताः ।}$$

$$\text{दूरत्वम्} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.कोज्याका}}{\text{ज्या(आ-का)}} = १०८^{\circ}२२८९ \text{ हस्ताः ।}$$

( ७ ) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे ५० ( अ ) हस्तौच्च्यं देवगृहं वर्तते तस्याग्रमूलयोस्तत्पर्वतोपत्यकायां स्थितेन मनुजेन विद्वयोर्लब्धे क्रमेणोन्नतांशमाने ५१° । ४०' ( आ ) । ५०° । १५' ( का ) तथा च तत्पर्वतौच्च्यं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{औच्च्यम्} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ-का)}} = ९६४^{\circ}४१२४ \text{ हस्ताः ।}$$

( ८ ) कस्यचिन्महासरसो दक्षिणोत्तरभागयोरीश्वरप्रासादे वर्तते तयोरन्तरप्रदेशावगमाय तत्सरसः पूर्वभागे तथा वंशो निखनितो यथा स दक्षिणप्रासादात् २०० ( अ ) हस्तान्तरे स्यादुदकप्रासादाच्च ८० ( क ) हस्तान्तरे भवेत् । ततो दक्षिणप्रासादाद्वंशोदकप्रासादयोरन्तर्गत-कोणे विद्धे लब्धा अंशाः २१° । १७' ( का ) अत्र पृच्छा तयोः प्रासादयोरन्तरं कियदिति ।

$$\begin{aligned} \text{अन्तरम्} &= \text{अ.कोज्याका} \pm \sqrt{\text{क}^2 - \text{अ}^2 \text{ज्या}^2 \text{क}} \\ &= २१९^{\circ}९७२ \text{ वा } १५२^{\circ}७५ \text{ हस्ताः ।} \end{aligned}$$

( ९ ) समुद्रान्तः प्रविष्टयोर्भूदेशयोरप्रयोर्महान्तौ शास्मलीवृक्षावासाते । तयोरन्तरप्रदेशावगमाय भूमिस्थात् कस्माच्चित् स्थानात् प्रति-वृक्षपर्यन्तं गणितौ प्रदेशौ क्रमेण १५० ( अ ), २०० ( क ) हस्तात्मकौ स्याताम् । एवं तस्मादेव स्थानात् तयोर्वृक्षयोरन्तरगंतकोणे विद्धे लब्धाः किलांशाः ५०° । २७' ( गा ) तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरप्रदेशः कियानिति प्रश्नः ।

अन्तरप्रदेशः =  $\sqrt{अ^2 + क^2 - २अक}$  कोज्यागा =  $१५५^{\circ} ८७$  हस्ताः ।

( १० ) पर्वतशिखरे प्रस्तरमयस्तम्भो वर्तते तस्यौच्छ्यावगमाय तत्पर्वतनिकटभूमौ स्थित्वा स्तम्भाग्रोन्नतिवेधे लब्धा अंशाः  $३१^{\circ} २०'$  ( आ ) ततः स्तम्भदिश्येवाग्रे सरलभूमौ  $१५०$  ( अ ) हस्तमितदेशं गत्वा स्तम्भाग्रमूलोन्नत्योर्वेधे कृते लब्धाः क्रमेणांशाः  $४५^{\circ} ४२'$  ( का ) ।  $३५^{\circ} ३३'$  ( गा ) तथा च स्तम्भौच्छ्यं कियत् पर्वतौच्छ्यं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{स्तम्भौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ ज्या( का - गा )}}{\text{कोज्यागा.ज्या( का - आ )}} = ६८^{\circ} ०९१ \text{ हस्ताः}$$

$$\text{पर्वतौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ कोज्याका ज्यागा}}{\text{कोज्यागा.ज्या( का - आ )}} = १५६^{\circ} ८९८४ \text{ हस्ताः}$$

( ११ ) यस्याः क्रमनिम्नभूमेः समानभूमौ प्रावण्यं  $३९^{\circ} १५'$  ( आ ) अंशा यस्याग्राधरप्रान्तो दुस्तरनद्यास्तटं भवति तस्याः परतीरे एकं देवगृहं वर्तते तस्यौच्छ्यावगमाय तदेवगृहसंमुखमेव तत्-क्रमनिम्नोर्व्या उपरितनप्रान्ते गणकेन स्थित्वा देवगृहशिखरे विद्धे लब्धा अधरांशाः  $११^{\circ} ३०'$  ( का ) एवं स देवालयसंमुखदिश्येव तां क्रमनिम्नभूमिं  $२००$  ( अ ) हस्तीमितामवरुह्य तद्दूमेरधरप्रान्तं प्राप्य पुनस्तदेवगृहाग्रे विद्धे लब्धा उन्नतांशाः  $२९^{\circ} २०'$  ( गा ) तथा सति नद्या विस्तृतिः कियती देवगृहस्यौच्छ्यं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{नद्या विस्तृतिः} = \frac{\text{अ.ज्या( आ - का ) कोज्यागा}}{\text{ज्या( का + गा )}} = १२४^{\circ} १६ ।$$

$$\text{देवगृहौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ ज्या( आ - का ) ज्यागा}}{\text{ज्या( आ + गा )}} = ६९^{\circ} ७७ ।$$

( १२ ) भूमौ निखनितस्य द्वात्रिंशद्वस्त-( अ ) परिमाणौच्छ्यस्य सरलवंशस्य मूलमभितः सर्वासु दिक्षु प्रवण आस्ते । तस्य समानभूमौ प्रावण्यं किल विंशतिरंशाः ( आ<sup>०</sup> ) । अथ तस्मिन् वंशे वातवेगेनैकदेशे भग्ने तस्याग्रं वंशमूलात् षोडश-( क ) हस्तान्तरे लग्नम्, तथा सति वंशो मूलात् कियत्सु हस्तेषु मग्न इति प्रश्नः ।

$$\frac{अ^२ - क^२}{२(अ + क) ज्याआ} = १०.२४७६ हस्तेषु भग्न इत्युत्तरम् ।$$

( १३ ) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे १२० ( अ ) हस्तप्रमाणः प्रस्तरस्तन्मौ वर्तते । तत्पर्वतोपलकास्थेन केनचित् पुरुषेण स्तम्भमूला-प्रयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ९° । ४०' ( आ ) ततः स्तम्भ-दिश्येवाग्रे २०० ( क ) हस्तामितसमानदेशं गत्वा पुनः स्तम्भमूलाप्र-योरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धास्तावन्त एवांशाः । तथा च पर्वतौच्छ्यं कियदिति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{पर्वतौच्छ्यम्} &= \frac{१}{३} \left\{ \sqrt{\left( \frac{अ}{ज्याआ} \right)^२ - क^२ - अ} \right\} \\ &= २८३.०४३४६५५ हस्ताः । \end{aligned}$$

( १४ ) हस्तशतो-( अ ) चन्द्रस्य राजसदनस्योपरिभागे स्थितो गणकः समभुवि दुर्गमस्थाने वर्त्तमानयोर्वृक्षयोरन्तरं जिज्ञासुस्तन्मू-लयोरधरांशमाने २° । ५६' ( आ ), ३° । ११' ( का ) एतावती अवगत्य तयोरैवान्तर्गतकोण ९° । ४१' ( गा ) अंशमितं दृष्टवान् । तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरं कियदिति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{अन्तरम्} &= अ \sqrt{\text{कोछे}^२ \text{आ} + \text{कोछे}^२ \text{का} - २ \text{कोछेआ कोछेका कोज्यागा}} \\ &= ३५४.३४९ । \end{aligned}$$

( १५ ) एका पूर्वापराऽन्या याम्योत्तरा चेति द्वे भित्ती द्वादश (अ) हस्तोच्छ्रिते स्तः । तत्र यदा पूर्वापराया भित्तेरुत्तरपार्श्वे छाया हस्तचतुष्क- ( क ) विस्तृता याम्योत्तरायाश्च पश्चिमपार्श्वे छाया हस्तत्रय- ( ग ) विस्तृता स्यात् तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः ।

$$\text{उन्नतांशः} = \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ६७^{\circ} १२' ४८''$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वकाले} \\ \text{उत्तरा दिगंशाः} \end{array} \right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ५३^{\circ} ७' ४८''$$

( १६ ) एका पूर्वापरा द्वादश- ( अ ) हस्तोच्छ्रया भित्तिरस्ति । तस्याः पश्चिमप्रान्ते लग्नां पूर्वदिक्चिह्नात्  $६७^{\circ} १३०'$  ( आ ) अंशान्तरे उत्तरभागे गताऽन्या भित्तिरस्ति साऽपि द्वादशहस्तोच्छ्रया । यदा तयोर्भित्तोश्छाये तद्बहिर्भाग एव तथा संजाते यथा पूर्वापरायाश्छाया हस्तत्रय- ( क ) विस्तृता स्यादन्यायाश्च हस्तचतुष्क- ( ग ) विस्तृता भवेत् । तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः ।

$$\text{उन्नतांशः} = \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग.कोज्याआ}}} \\ = ६२^{\circ} ११' ३९''$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वकपाले} \\ \text{उत्तरा दिगंशाः} \end{array} \right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{का.ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग.कोज्याआ}}} \\ = २८^{\circ} १७' ५१''$$

( १७ ) कश्चन गणकः कोणमापकयन्त्रविरहितोऽपि केवल्यष्टयैव दुस्तरनद्याः पात्रप्रमाणं जिज्ञासुर्वाहृतीरे ( कग ) सरलप्रदेशं  $१७५$  पञ्चसप्तत्युत्तरशतहस्तमितं गणयित्वा परतीरस्य ( अ ) धिक् ( क )-

स्थानाद्यस्यो दिशि वर्त्तते तद्विरुद्धदिशि ( कघ ) प्रदेशं पट्टिहस्तमितं विगणय्य ( गघ ) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१४ ततः ( ग ) स्थानाद्यस्यां दिशि ( अ ) चिह्नं वर्त्तते तद्विपरीतदिशि ( गघ ) प्रदेशं ९० हस्तमितं विगणय्य ( कघ ) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१५ तथा च तन्नद्याः पात्रप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

पात्रप्रमाणम् = २००'८६२८ हस्ताः ।

( १८ ) यस्याः समानभूमौ प्रावण्यं विशतिः २०° ( आ ) अंशा-  
स्तादृश्याः क्रमनिम्नभूमेरुपरितनभागेऽस्ति शत- ( अ ) हस्तोच्छ्रयः  
कश्चन तरुः । तस्य संमुखदेश एव क्रमनिम्नोर्व्यां अधस्तनभागे वृक्षा-  
द्वस्तशतद्वया- ( क ) न्तरेऽस्त्येकोदकपूर्णां वापी । तथा च तद्वृक्षप्रभा-  
गस्थयोर्वानरयोरेकस्तत्त उत्तीर्य वापीमगादपरश्च ततः किञ्चिदुड्डीय  
कर्णमार्गेण सामगात् । तथा च तयोर्गत्योः समत्वं उड्डीनमानं किय-  
दिति प्रश्नः ।

$$\text{उड्डीनमानम्} = \frac{\text{अक}( १ - ज्याआ )}{२अ - क ( १ + ज्याआ )} = २८'०९४५४५ ।$$

( १९ ) सरलवंशस्याग्रे ( अ ) हस्तदैर्घ्यस्य समानप्रदेशस्य प्रान्तयोः  
प्रत्येकं स्थित्वा विद्धे लब्धास्तुत्या एव ( आ ) संख्याका उन्नतांशाः ।  
तस्य च मध्यभागे स्थित्वा वंशाग्रे विद्धे लब्धा ( का ) उन्नतांशाः ।  
तथा च तस्य वंशस्योच्छ्रितिः कियसी प्रदेशमध्यस्थानाद्दूरत्वं च  
कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{उच्छ्रितिः} = \frac{\text{अ. ज्याआ. ज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}( आ + का ) . ज्या( आ - का )}} ।$$

$$\text{दूरत्वम्} = \frac{\text{अ ज्याआ. कोज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}( का + आ ) . ज्या( का - आ )}} ।$$



( २० ) अ, क, ग संज्ञकेषु त्रिषु स्थानेषु ( अ ) स्थानात् ( क ) स्थानं प्राच्यां दिशि वर्तते ( ग ) स्थानं च प्राक्चिह्नतो दक्षिणभागे ( अ ) अंशान्तरे वर्तते । अथ ( कग ) स्थानयोरन्तरप्रदेशः ( अ ) हस्तमितोऽस्ति किन्तु तस्य दुर्गमत्वात् कस्मिंश्चिन्मनुजे ( क ) स्थानात् ( अ ) स्थानं गत्वा ततः ( ग ) स्थानं यावे तेन ( क ) हस्तमितः प्रदेशोऽतिक्रान्तः । तथा च ( क ) स्थानात् ( अ ) स्थानं कियद्दूरे ( अ ) स्थानाच्च ( ग ) स्थानं कियद्दूरे वर्तत इति प्रश्नः ।

$$(क) \text{ स्थानात् } (अ) \text{ स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{१}{२} क \pm \frac{\sqrt{अ^२ - \frac{१}{२} अ क}}{२ कोज्या \frac{१}{२} अ}$$

$$(अ) \text{ स्थानाच्च } (ग) \text{ स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{१}{२} क \mp \frac{\sqrt{अ^२ - \frac{१}{२} अ क}}{२ कोज्या \frac{१}{२} अ}$$

इति त्रिकोणमितितन्त्रे चतुर्थोऽध्यायः ।



अथ  
त्रिकोणमितौ ग्रन्थरुदुर्कविंशतिप्रश्नानां  
सुवासनागणिताभ्यां सहोत्तराणि ।

( १ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



फलप्यते अइडक आयतक्षेत्र यस्यैको भुजः अइ=भ=५० इस्ता ।  
अत्र अइ-भुजस्य इ-प्रान्ते स्थित्वा उक-भुजस्य क-प्रान्तवेधेत लब्धा,  
कोणाशा.=३०°=भा । एवमिह इडक-जात्यभिभुजे

$$\frac{\text{व्या} ६०^{\circ}}{\text{व्या} ३०^{\circ}} = \frac{\text{इउ}}{\text{अइ}} \therefore \text{इउ} = \frac{\text{अइ} \times \text{व्या} ६०^{\circ}}{\text{व्या} ३०^{\circ}}$$

$$= \frac{\text{अइ}}{\text{व्या} ३०^{\circ}} = \frac{\text{अइ}}{\text{स्प} ३०^{\circ}} = \frac{\text{भा}}{\text{स्पभा}} \quad | \quad \text{व्या} ३०^{\circ} = \frac{१}{२},$$

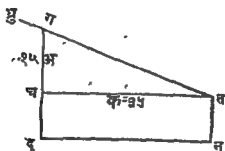
$$\therefore \text{व्या} ६०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२} \therefore \text{स्पभा} = \frac{\frac{१}{२}}{\frac{\sqrt{३}}{२}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$\therefore \text{इवभुजः} = \frac{अ}{१} = अ \times \sqrt{३} = ५० \sqrt{३}$$

$$= \sqrt{२५०० \times ३} = \sqrt{७५००} \text{ अस्य } ८१\text{तमपृष्ठस्थनवीन-}$$

$$\text{मूलानयनरीत्या मानम्} = ८६.६०२५४ ।$$

( २ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते चतुर्दश-समभूमेरुपरि पूर्वापरायता १५हस्तोच्छ्रिता भि-  
त्तिरस्ति । भित्तिमूलात् च-स्थानाद् दक्षिणतः च-स्थाने उत्थाय रात्रौ  
यष्टुचरं विलोक्यते तदा ध्रुववारा तद्भिन्नेरप्रदेशे ग-विन्दावेव  
दृश्यते । अत्र ध्रुवोन्नातिरपेक्ष्या । चक्रे गचतत्रिभुजे अ, क, ग क्रमेण  
भुजाः, कोणाश्च आ, का, गा । ज्ञातत्वात् गा = ९०° ।

$$\text{अत्र } \frac{\text{उयाआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{उयाआ}}{\text{कोज्याआ}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{रपआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

अतोऽस्य ९७तमपृष्ठस्थपञ्चमोदाहरणानुसारेण प्रपातमापकरूपम् ।

$$\text{प्रपादरपआ} = १० + \text{प्रपादअ} - \text{प्रपादक}$$

$$= १० + १०६०९१३ - ५४४०६१८ = ९.६३२०२९५ ।$$

अत्र 'लघुरिक्त' - सारिणीत प्रघाट(२३° । ११')

$$= ९६३१७०३७$$

$$\text{अथ } ९६३२०२९५ - ९६३१७०३७ = ३२९८$$

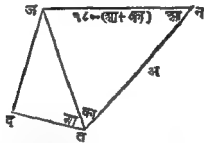
$$\therefore \text{प्रघाट}(२३^{\circ} । ११') - \text{प्रघाट}(२३^{\circ} । १२') = ३४९०$$

$$\therefore \frac{३२९८ \times ६०''}{३४९०} = \frac{१९५४८}{३४९} = ५६$$

$$\therefore \text{प्रघाटस्पर्शा} = ९६३२०२९५ = \text{प्रघाट}(२३^{\circ} । ११' । ५६'')$$

$$\therefore \text{आ-कोण} = २३^{\circ} । ११' । ५६'' \text{ इयमेव ध्रुवोन्नति ।}$$

( ३ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



दत्त समानभूमाविष्टप्रमाणो जद-वशोऽस्ति यस्य द-मूलाद् दत्तप्र-  
देशस्य त-स्थाने कश्चिद् द्रष्टा स्थित । तस्मात् ज वशाप्रवेधेन  $\angle$ जतद  
= ना =  $५७^{\circ} । ४०'$  । अथ दत्तमार्गमपहायान्य तन-मार्गमनुसृत्य श-  
तद्वयमिते तन-तुल्ये अ-प्रदेशे गतेन तेनैव द्रष्टा वशात् विद्धम् । यत्र  
 $\angle$ जनत =  $\angle$ आ =  $५०^{\circ} । १२'$ , एव  $\angle$ जतन =  $\angle$ का =  $४०^{\circ} । २३'$  ।  
अतः जतन-त्रिभुजे तज्जन कोणस्यापि ह्यान सुलभम् । अत्र वशोच्छ्रिति-  
रयमस्या । एतदर्थं प्रथम जतप्रमाणमानीयते तद्यथा—

$$\frac{\text{अ}}{\text{ज्या } \{ १८० - (\text{आ} + \text{का}) \}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})} = \frac{\text{जत}}{\text{ज्याआ}}$$

$$\therefore \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})} = \text{जत}$$

$$\therefore \text{जद} = \frac{\text{जत} \times \text{ज्यागा}}{1} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{ज्यागा}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का}) \times 1}$$

$$\therefore \text{प्रघाटजद} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याभा} + \text{प्रघाटज्यागा} \\ - \text{प्रघाटज्या}(\text{आ} + \text{का}) - \text{प्रघाट१}$$

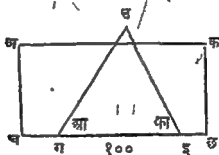
$$= 3010300 + 99266318 + 96644214$$

$$- 99999988 - 10$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 201133629 \\ - 99999988 \\ \hline 1138041 \end{array} \right. = \text{प्रघाटजद} = \text{प्रघाट१२९८४}$$

$$\therefore \text{जद} = 12984$$

(४) मशस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अकछघ-प्रदेशे किमपि गृहं वर्तते यत्र वेध्यस्थानम् छ । तद्गृहं च यस्या नद्यास्तटेऽस्ति ततोऽन्यस्मिन् पारे अ-स्थाने विद्यमानेन केन चिद्द्रष्टा तत् स्थानं विद्धा तत्र एक शतहस्तमितं प्रदेशं तिर्यग्-गात्रा पुनस्तदेव स्थानं विद्धम् । तत्र कोणौ  $\angle \text{आ} = 40^\circ$  ।  $25'$   $\angle \text{का} = 37^\circ$  ।  $45'$  अतः स्थानद्वयाद्गृहान्तरे अपेक्ष्ये ।

$$100 = \text{अ} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}\{100 - (\text{आ} + \text{का})\}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})} = \frac{\text{इत}}{\text{ज्याभा}}$$

$$= \frac{\text{गड}}{\text{ज्याका}} \therefore \text{इउ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या(आ+का)}}$$

$$\text{एवम् गड} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ+का)}}$$

द्वयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे ।

$$\text{प्रघाटइउ} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याआ} - \text{प्रघाटज्या(आ+का)}$$

$$= ००००००० + ९८११८०३८ - ९९९०७५०२$$

$$= - १७८९४६४ = ८२१०५३६ = \text{प्रघाट}(६६२३)$$

$$\therefore \text{इउ} = ६६२३ ।$$

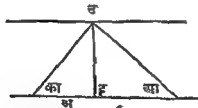
$$\text{एवम् प्रघाटगड} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याका} - \text{प्रघाटज्या(आ+का)}$$

$$= ००००००० + ९७८७३९४६ - ९९९०७५०२$$

$$= - २०३३५५६ = ७९६६४४४ = \text{प्रघाट}(६२६१)$$

एव यत्र ऋणमानं सपद्यते तत्र तद्वरूपाद्विशोध्य धनमानम-  
वगम्यम् ।

### (५) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते नद्या अपरतटस्थः कश्चिद् पदार्थः उ । आ-प्रदेशस्थेन तं  
विध्यता द्रष्टुं आ कोणो ज्ञातस्तथा अ-पट्टिमित हस्तान्तर तिर्यग्गत्वा-  
तस्तस्मैव विध्यता तेन का कोणोऽपि ज्ञात । एव त्रिभुजस्य कोणाभ्या  
सदन्तर्वर्तिना भुजेन च नदीविस्तारोऽवगम्य ।

दर्शितक्षेत्रे  $१८०^{\circ} - (\text{आ} + \text{का}) = \text{चक्रोणः}$  ।

$$\therefore \text{चका} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})}$$

$$\therefore \text{नदीविस्तारः} = \text{उइ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का}) \times १}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम् ।

$$\begin{aligned} \text{प्रघातुइ} &= \text{प्रघातुअ} + \text{प्रघातुज्याआ} + \text{प्रघातुज्याका} \\ &\quad - \text{प्रघातुज्या}(\text{आ} + \text{का}) - १० \end{aligned}$$

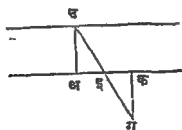
$$\begin{aligned} &= ७७८१५१३ + ९८२७८८४३ + ९८९९५०६ \\ &\quad - ९९९८४३१५ - १० \end{aligned}$$

$$= २०५०५९८६२ - १९९९८४३१५$$

$$= ५०७५५४७ = \text{प्रघातु} ३२^{\circ} १८'$$

$$\therefore \text{उइ} = \text{नदीविस्तारः} = ३२^{\circ} १८' \dots \dots$$

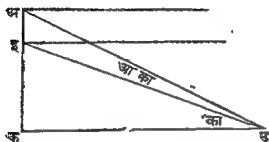
अथ केवलरेखागणितेनास्य प्रकारान्तरोपपत्तिः ।



अन्यथाऽपि नदीविस्तारोऽवगन्तुं शक्यते कल्प्यते-नद्या अपरपार्श्वे कश्चिद् च-बिन्दु । अ-बिन्दुस्थेन द्रष्ट्वा तयाऽवलोक्यते यथा नदीतट-  
पायाम् अक-रेखायाम् उभ-रेखा लम्बरूपा भवेत् । तत इ-बिन्दुर्यावति  
दूरे यदिशि तवाति दूरे यदिश्येव क-बिन्दो गत्वा तया कग रूपाया

लम्बरेखायां स द्रष्टा चलितो यथा इ बिन्दु पश्यन् च बिन्दुमपि पश्येत्  
तदा ( रे. १ अ. २६ प्र ) अउ = कग, अयमेव नदीविस्तार सुसिद्धः ।

(( ६ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अइ = गृहोच्च्यम् = अ । अ-बिन्दुर्गृहोर्ध्वप्रदेशः । इ-बिन्दुर्गृहतल-  
प्रदेशः । उ बिन्दुस्या महानौ । कउ = उच्छ्रितिप्रदेशमूलाभौकाधिष्णि-  
तप्रदेशदूरता ।

अस्मिन् प्रश्ने “गृहतलोर्ध्वदेशाभ्याम्”—इत्यत्र “गृहोर्ध्वतलदेशा-  
भ्याम्”—इत्यनेन भवितव्यम् ।

$$\text{अइउ-त्रिभुजे इउ} = \frac{\text{अइ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या(आ-का)}}$$

$$\text{कइउ त्रिभुजे कइ} = \frac{\text{इउ} \times \text{ज्याका}}{१} = \frac{\text{अइ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}} = \text{उच्छ्रिति} ।$$

$$\text{अत्रैव कउ} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{कोज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}} = \text{दूरता} ।$$

इयोः प्रपातमापकरूपे ।

प्रपादकइ



$$= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटकोज्याभा} + \text{प्रघाटज्याका} - \text{प्रघाटज्या}(\text{भा} - \text{का}) - १०$$

$$= \text{प्रघाट} ४० + \text{प्रघाटकोज्या}(४०^{\circ} \mid १५') + \text{प्रघाटज्या}(२५^{\circ} \mid ३०')$$

$$\text{प्रघाटज्या}(४०^{\circ} \mid १५' - २५^{\circ} \mid ३०') - १०।$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + ६०२०६०० \\ + ९८८२६५६८ \\ + ९६३३९८४४ \\ - १० \\ - ९४०५८६१७ \end{array} \right\} + २०११८७०१२ = - \frac{१९४०५८६१७}{७१२८३९५}$$

$$= \text{प्रघाट} ५१६२४८$$

$$\therefore \text{कइ} = \text{उच्छ्रुति} = ५१६२४८ \text{ प्रभोत्तरे उच्छ्रुतिः}$$

$$\text{कइ} = १५६२२५६ \text{ प्रायः प्रामादिकीति विज्ञैर्ज्ञेयम्।}$$

$$\text{अथैवं प्रघाटकव}$$

$$= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटकोज्याभा} + \text{प्रघाटकोज्याका}$$

$$- \text{प्रघाटज्या}(\text{भा} - \text{का}) - १०$$

$$= \text{प्रघाट}(४०) + \text{प्रघाटज्या } ४९^{\circ} \mid ४५' + \text{प्रघाटज्या}(६४^{\circ} \mid ३०')$$

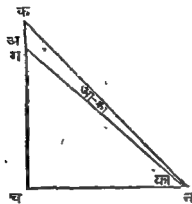
$$- \text{प्रघाटज्या}(४०^{\circ} \mid १५' - २५^{\circ} \mid ३०') - १०।$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + ६०२०६०० \\ + ९८८२६५६८ \\ + ९९५५४८८२ \\ - ९४०५८६१७ \\ - १० \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + २०४४०२०५० \\ - १९४०५८६१७ \\ १०३४३४३३ \end{array} \right\}$$

$$= \text{प्रघाट} १०८२२९७$$

$$\therefore \text{दूरता} = १०८२२९७।$$

( ७ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र (न) पर्वतोपत्यकाभूमौ वेध्यस्थानम् । चग-पर्वतस्य ग-शिखरे  
कग-देवगृहम् । न-स्थानतो देवगृहाप्रवेधेन उन्नतांशाः  $\angle$  कनच = अ,  
एवं देवगृहमूलवेधेन उन्नतांशाः  $\angle$  गनच = का, कग = अ ।

आ = ५१° ४०' । का = ५०° १५' । अ = ५० हस्ताः ।

अत्र कनच-त्रिभुजस्य ज्ञात्वात्

$$\angle \text{चकन} = ९०^\circ - \angle \text{कनच} \therefore \frac{\text{कग}}{\text{ज्या } \angle \text{कनग}} = \frac{\text{गन}}{\text{ज्या } \angle \text{गकन}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})} = \frac{\text{गन}}{\text{कोज्याआ}}$$

$$\therefore \text{गन} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}$$

$$\therefore \frac{\text{गन}}{१} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्या } \angle \text{गनच}} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्याका}}$$

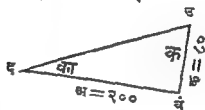
$$\therefore \text{चग} = \text{पर्वतोच्च्यम्} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १}$$

$$\therefore \text{प्रघादचग} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादकोज्याआ} + \text{प्रघादज्याका}$$

$$= \text{प्रघादज्या}(\text{आ} - \text{का}) - \text{प्रघादज्या}(९०)$$

$$\left\{ \begin{array}{r}
 ५९८९७०० \\
 + ९७९२५५६६ \\
 + ९८८९८३७० \\
 + २०३७७३६३६ \\
 - ८३९३१००८ \\
 - १० \\
 \hline
 १९८४२६२८
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \therefore \text{प्रघाटचग} = १९८४२६२८ \\
 \therefore \text{चग} = ९६४४१२६ \text{ एतदेव} \\
 \text{पर्वतौच्छयम् ।}
 \end{array}$$

(८) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अस्मिन् प्रश्ने प्रासादो वर्तते इत्यत्र “प्रासादे वर्तते” इत्यशुद्धिः ।  
 द-संरसो दक्षिणभागः । उ-उत्तरभागः । व-पूर्वभागे द-स्थानात् अ-  
 हस्तान्तरे तथा उ-स्थानात् क-हस्तान्तरे वंशमूलम् । अत्र वंदउ-कोणो  
 मेधेन ज्ञातः = का, दव = अ, उव = क ।

$$\therefore (३८) \text{ प्रक्रमतः कोज्याका} = \frac{अ^2 + दउ^2 - क^2}{२अ.दउ}$$

$$\therefore क^2 - अ^2 = दउ^2 - २अ.दउ.कोज्याका$$

$$\therefore क^2 - अ^2 + अ^2.कोज्या^2का$$

$$= दउ^2 - २अ.दउ.कोज्याका + अ^2.कोज्या^2का$$

$$क^2 - अ^2 (१ - कोज्या^2का)$$

$$\therefore \underline{+ मू} = दउ - अ.कोज्याका \therefore अ.कोज्याका + मू = दउ$$

$$\therefore दउ = अ.कोज्याका + \sqrt{क^2 - अ^2.ज्या^2का}$$

$$\text{या दउ} = अ.कोज्याका - \sqrt{क^2 - अ^2.ज्या^2का}$$

अत्र अ.कोज्याका = ग कल्प्यते, तदा प्रपादग

$$= \text{प्रघाटभ} + \text{प्रघाटकोज्याका} = \left\{ \begin{array}{l} २३०१०३०० \\ ९९६९३२१२ \\ \hline १२२७०३५१२ \end{array} \right\}$$

∴ ग = १८६३६१ । अथ क - अ, ज्याका एतन्मूलार्थं  
अ, ज्याका = च कल्प्यते तदा प्रघाटच

$$= \text{प्रघाटभ} + \text{प्रघाटज्याका} = \left\{ \begin{array}{l} २३०१०३०० \\ ९५५९८८२९ \\ \hline ११८६०९१२९ \end{array} \right\}$$

$$∴ \text{प्रघाटच} = २(११८६०९१२९) = २३७२१८२५८$$

$$∴ \text{च} = ५२७०९८$$

$$∴ \text{दृढ} = \text{अ.कोज्याका} + \sqrt{\text{क}^2 - \text{अ}^2 \text{ज्याका}}$$

$$= ग + \sqrt{\text{क}^2 - \text{च}^2} = ग + \sqrt{६४०० - ५२७०९८}$$

$$= ग + \sqrt{११२९८२} = ग + ३३६११$$

$$= १८६३६१ + ३३६११ = \left\{ \begin{array}{l} २१९९७२ \\ \text{वा } १५२७५ \end{array} \right\}$$

$$∴ \text{दृढ} = २१९९७२ \text{ वा } १५२७५$$

( ९ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र शा, शा शास्त्रमलीवृक्षौ, वे.स्था वेध्यस्थानम् । ततः अ, क  
भुजौ तदन्तर्गतकोणयैवे शाताः । एभ्यो ग-भुजप्रमाणमन्वेष्टव्यम् ।

$$(३८) \text{ प्रक्रमतः कोज्यागा} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2}{२\text{अ.क.}}$$

$$\therefore २\text{अ.क.कोज्यागा} = \text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2$$

$$\therefore \text{ग}^2 = \text{अ}^2 + \text{क}^2 - २\text{अ.क.कोज्यागा}$$

$$\therefore \text{ग} = \sqrt{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - २\text{अ.क.कोज्यागा}}$$

$$\text{अत्र } २\text{अ.क.कोज्यागा} = \text{च}$$

$$\therefore \text{प्रघाटच} = \text{प्रघाट२} + \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटक} + \text{प्रघाटकोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} ३०१०३०० \\ २१७६०९१३ \\ २३०१०३०० \\ ९८०३९६९९ \end{array} \right\} \therefore \text{प्रघाटच} = १४५८२१२१२$$

$$\frac{१४५८२१२१२}{१४५८२१२१२}$$

$$\therefore \text{च} = ३८२०५११४$$

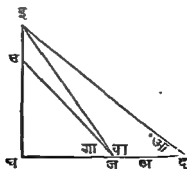
$$\therefore \text{ग} = \sqrt{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{२२५०० + ४०००० - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{६२५०० - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{२४२९४८८६} = १५५८७$$

(१०) मन्त्रस्योत्तरम् ।



चउ = पर्वतौच्छयम्, तत्र उइ-स्तरम्, द-प्रथमवेध्यस्थानम् ।  
ज-पर्वताध-प्रदेशस्थं द्वितीयवेध्यस्थानम् । इदज-कोणः = भा = ३१° २०',  
इजच-कोणः = का = ४५° । ४२', सजच-कोणः = गा = ३५° । ३६'  
जद = अ = १५०, अत्र पर्वतौच्छयं स्तरमोच्छ्रितिश्रैवे अपेक्ष्ये ।

इजइ-त्रिभुजे जइद-कोणः = का - भा,

$$\therefore \text{इज} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा}}{\text{ज्या}(का - भा)}$$

$\therefore$  इइज-त्रिभुजे इजउ-कोणः = का - गा

$$\therefore \text{इउ} = \frac{\text{इज} \times \text{ज्या}(का - गा)}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{ज्या}(का - गा)}{\text{ज्या}(का - भा) \times \text{कोज्यागा}}$$

$$\text{इजउ-त्रिभुज एव जउ} = \frac{\text{इज} \times \text{कोज्याका}}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{कोज्याका}}{\text{ज्या}(का - भा) \times \text{कोज्यागा}}$$

$$\therefore \text{उच} = \frac{\text{जउ} \times \text{ज्यागा}}{१} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{कोज्याका} \times \text{ज्यागा}}{१ \times \text{ज्या}(का - भा) \times \text{कोज्यागा}}$$

अतयोः प्रधातगापकरूपे

$$\text{प्रधादइउ} = \text{प्रधादअ} + \text{प्रधादज्याभा} + \text{प्रधादज्या}(का - गा)$$

$$- \text{प्रधादज्या}(का - भा) - \text{प्रधादकोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + १७६०९१३ \\ + ९७१६०१६८ \\ + ९२४६०६९५ \\ + १९१३८१७७६ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} + ९३९४६७२९ \\ + ९९१०४१५५ \\ + १९३०५०८८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + १९०१३८१७७६ \\ - १९०३०५०८८४ \\ \hline - १६६९१०८ \\ + ८३३०८९२ \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{प्रघाटइउ} = ८३३०८९२ \therefore \text{इउ} = ६८०३६$$

$$\text{प्रघाटउच} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याआ} + \text{प्रघाटकोज्याका} +$$

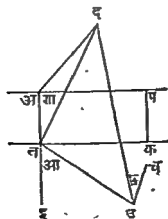
$$\text{प्रघाटज्यागा} - १० - \text{प्रघाटज्या(का - आ)} - \text{प्रघाटकोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + १७६०९१३ \\ + ९७१६०१६८ \\ + ९८४४११३७ \\ + ९७६४४८४९ \\ \hline + २९५००७०६७ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{r} + १० \\ + ९०३९४६५२९ \\ + ९९१०४१५५ \\ \hline + २९०३०५०६८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + २९५००७०६७ \\ - २९०३०५०६८४ \\ \hline १९५६३८३ \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{प्रघाटउच} = १९५६३८३ \therefore \text{उच} = १५६८९८५$$

(११) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते अपकृत = नद्याकृतिभागः । यत्र अ अपरभागे,  
 अद = देवगृहौचन्यम् । तत्र = (वेध्यपारे) प्रवणभूप्रदेशः । तत्र उ =  
 उच्चभूप्रदेशचिह्नम्, त = तलप्रदेशचिह्नम् । अइ-रेखा त-विन्दुतः क्षि-  
 त्तिजसमानान्तरधरातलगतता अप-रेखोपरि तथा तक-रेखोपरि लम्बरूपा,  
 त स्थानात् प्रावण्यकोणः = आ, त-स्थानाद् देवमन्दिराप्रवेधेनोन्नतांशाः  
 = का, उ स्थानाद् देवमन्दिराप्रवेधेनोन्नतांशाः = गा, अतः अत नदी-  
 विस्तृतेस्तथा अद-मन्दिरौच्यमानस्य च हानमपेक्ष्यम् ।

अत्रेदमवधेयं यत् त-स्थानात् क्षितिजसमानान्तरधरातलं तदु-  
 धितदेवमन्दिराप्रगरेखां स्पृशेत् त-स्थानतस्तथा उ स्थानतश्च क्षिति-  
 समानान्तरधरातलान्तरादुत्पन्नमन्दिरौच्यमिति ।

अत्रोपपत्तिः । तइ, उच-रेखे समानान्तरे तउ-रेखया छिन्ने,  $\angle$  इतउ  
 = आ =  $\angle$  तउच,  $\therefore \angle$  तउच =  $\angle$  दतउ = आ - का =  $\angle$  तउद ।

अथ  $\angle$  दतउ =  $१८०^{\circ}$  - (आ + गा)

$$\therefore \angle$$
 तउच +  $\angle$  दतउ =  $१८०^{\circ}$  - (आ + गा) + (आ - का)

$$= १८०^{\circ} - (का + गा) \therefore \angle$$
 तउद

$$= १८०^{\circ} - [१८०^{\circ} - (का + गा)] = का + गा$$

$$\therefore \text{तद} = \frac{\text{तउ} \times \text{उया}(\text{आ} - \text{का})}{\text{उया}(\text{का} + \text{गा})}$$

$$\therefore \text{अत} = \frac{\text{तउ} \times \text{उया}(\text{आ} - \text{का}) \text{ कोउयागा}}{१ \times \text{उया}(\text{का} + \text{गा})}$$

$$\text{अद} = \frac{\text{तउ} \times \text{उया}(\text{आ} - \text{का}) \text{ उयागा}}{१ \times \text{उया}(\text{का} + \text{गा})}$$

अत्र तउ = अ

$\therefore$  अनयोः प्रपातमापन्नरूपे—

$$\text{प्रपादभूत} = \text{प्रपादभ} + \text{प्रपादउया}(\text{आ} - \text{का})$$

$$+ \text{प्रपादकोउयागा} - १० - \text{प्रपादउया}(\text{का} + \text{गा})$$



अत्र उ-स्थानलघुः कोणः प्रावण्यम् = अ,  $\therefore$   $\angle$  कभउ = आको,  
उक त्रिभुजे (३८) प्रक्रमतः—

$$\text{ज्याभा} = \frac{\text{अउ}^2 + \text{अक}^2 - \text{कउ}^2}{२\text{अउ.अक}}, \text{द्वितीयपदे, कोटिज्याया कृणत्वात्}$$

$$\text{कउ}^2 = \text{अउ}^2 + \text{अक}^2 + २\text{अउ.अक. ज्याभा},$$

$$\text{कउ} = \text{अइ} - \text{अक} \therefore \text{कउ}^2 = \text{अइ}^2 - २\text{अइ.अक} + \text{अक}^2,$$

$$\therefore \text{अइ}^2 - २\text{अइ.अक} + \text{अक}^2 = \text{अउ}^2 + \text{अक}^2 + २\text{अउ.अक.ज्याभा}$$

$$\therefore \text{अइ}^2 - \text{अउ}^2 = २\text{अइ.अक} + २\text{अउ.अक.ज्याभा} \\ = \text{अक } २(\text{अइ} + \text{अउ. ज्याभा})$$

$$\therefore \text{अक} = \frac{\text{अइ}^2 - \text{अउ}^2}{२(\text{अइ} + \text{अउ.ज्याभा})}$$

अत्र हरे २( अइ + अउ.ज्याभा ) द्वितीयखण्डस्य प्रघातमापक-  
रूपम् ।

$$\text{प्रघाटअउ} + \text{प्रघाटज्याभा}$$

$$= \left. \begin{array}{l} २०४१२०० \\ ९५३४०५१७ \end{array} \right\} = ९७३८१७१७$$

$$\therefore २(\text{अइ} + ५४९५) = २(३२ + ५४९५)$$

$$= २(३७४९५) = ७४९९०$$

$$\therefore \text{अक} = \frac{\text{अइ}^2 - \text{अउ}^2}{२(\text{अइ} + \text{अउ.ज्याभा})} = \frac{१०२४ - २५६}{७४९९०}$$

$$= १०२४ \dots\dots$$

## (१३) मन्त्रस्योत्तरम् ।



कुत्रापि समानभूमौ स्थित्वा कस्य चिदुच्चभूमिपटस्य स्तम्भस्याप्र-  
मूढगतसूत्रोत्पन्नकोणो यदि तस्यामेव समानभूमौ स्थानान्तरे स्थित-  
वता विध्यता जनेन पूर्वविद्धाप्रमूढोत्पन्नकोणसमानः कोणः प्राप्तस्तदा  
स्तम्भप्रमाणरूपाधारे त्रिभुजद्वयमुत्पद्यते ययोः शीर्षद्वयनावाधारसं-  
मुखौ कोणौ समानावतस्तत् त्रिभुजद्वयमेकवृत्तान्तर्गतम् । इयमेव संस्था-  
ऽस्मिन् १३प्रश्नेऽप्युक्तोऽत्र प्रथमवेधस्थानम् (प), द्वितीयवेधस्थानम्  
(द), स्तम्भमूढम् (स), स्तम्भाग्रम् (अ), चैतेभ्यश्चतुर्भ्यो बिन्दुभ्य-  
श्चतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतम् । वेधस्थानान्तरम्  $पप = २०० = क$  । अग्रमूढो-  
त्पन्नकोणः  $\angle सपअ = \angle सदअ = अा = ८^{\circ} ४०'$  । स्तम्भप्रमाणम्  $= अअ$   
 $= १२० = अ$  ।

$$\therefore \text{अवपस-वृत्तव्यासार्धम्} \frac{\frac{अस}{२} \times १}{ज्याअा} = \frac{अस}{२ज्याअा}$$

$$= \frac{अ}{२ज्याअा} = कद,$$

$$\therefore कद^२ - जद^२ = कद^२ - \left( \frac{दप}{२} \right)^२ = कद^२ - \left( \frac{क}{२} \right)^२$$

$$= \frac{अ^२}{४ज्या^२अा} - \frac{क^२}{४} = \frac{१}{४} \left( \frac{अ^२}{ज्या^२अा} - क^२ \right)$$

$$= चमः \therefore \frac{१}{२} \sqrt{\frac{अ^२}{ज्या^२भा} - क^२} = चम$$

$$\therefore \frac{१}{२} \sqrt{\frac{अ^२}{ज्या^२भा} - क^२} - \frac{अ}{२} = चम - सच$$

$$\therefore भस = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\frac{अ^२}{ज्या^२भा} - क^२} - अ \right\}$$

$$= \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\left( \frac{अ}{ज्याभा} \right)^२ - क^२} - अ \right\} \text{ इदमेव पूर्वतौच्यम् ।}$$

अत्र कोष्ठकान्तर्गतप्रथमखण्डस्य

प्रघातमापकरूपार्थं यदि  $\left( \frac{अ}{ज्याभा} \right)^२ = इ^२$  कल्प्यते

तदा प्रघादइ = प्रघादअ - प्रघादज्याभा

$$+ ०७९१८१२$$

$$\frac{-९२२५०९१८}{०५४०८९४} \therefore \text{प्रघादइ} = ०८५४०८९४$$

$$\therefore इ = ७१४६४१९ \therefore इ^२ = ५१०७१३०२५२३५६१$$

$$\therefore \left( \frac{अ}{ज्याभा} \right)^२ - क^२ = ५१०७१३०२५ - ४००००$$

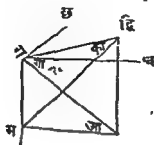
$$= ४७०७१३०२५$$

$$\therefore \sqrt{\left( \frac{अ}{ज्याभा} \right)^२ - क^२} = ६८६०८$$

$$\therefore \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\left( \frac{अ}{ज्याभा} \right)^२ - क^२} - अ \right\} = १८३०४$$

इदमेव पूर्वतौच्यमानमिति ।

(१४) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते

अत्र मग = राजसदनोच्छ्रुतिः ।

प्र = प्रथमवृक्षमूलम् ।

दि = द्वितीयवृक्षमूलम् ।

प्र-दि = वृक्षमूलान्तरम् ।

गघ-गछ-रेखे अघरांशकोणज्ञानार्थं

वृष्टस्या टिप्पण्यवलोक्यता ।

गमप्रत्रिभुजस्य जात्यत्वात् गप्र

गमद्वित्रिभुजस्यापि जात्यत्वात्

∴ गप्रदि-त्रिभुजे 'प्रदि' वृक्ष

प्रक्रमतः—

$$\frac{\text{गप्र}^2 + \text{गदि}^2 - \text{प्रदि}^2}{2\text{गप्र.गदि}} = \cos$$

$$\therefore \text{गप्र}^2 + \text{गदि}^2 - \text{प्रदि}^2 =$$

$$\therefore \text{प्रदि}^2 = \text{गप्र}^2 + \text{गदि}^2$$

$$= \frac{\text{गम}^2}{\text{उदा'अ'का}} + \frac{\text{गम}^2}{\text{उदा'का}}$$

$$= गम \left( \frac{१}{ज्या^२ भा} + \frac{१}{ज्या^२ का} - \frac{२कोज्यागा}{ज्याभा.ज्याका} \right)$$

$$\therefore प्रदि = गम \sqrt{कोछ^२ भा + कोछ^२ का - २कोछभा.कोछका.कोज्यागा}$$

$$= भ \sqrt{\frac{१}{ज्या^२ भा} + \frac{१}{ज्या^२ का} - २कोज्यागा \times \frac{१}{ज्याभा.ज्याका}}$$

अत्र हस्तादिमानानयनार्थं 'छपुरिक्य'-सारिणीतः प्रघातमापक-  
रूपायास्त खण्डचतुष्टयं कृतम् । अ,  $\frac{१}{ज्या^२ भा}$ ,  $\frac{१}{ज्या^२ का}$ ,  $\frac{२कोज्यागा}{ज्याभा.ज्याका}$  ।

$$\frac{१}{ज्या^२ भा} = क, \frac{१}{ज्या^२ का} = ग, \frac{२कोज्यागा}{ज्याभा.ज्याका} = घ$$

$\therefore$  प्रघाटक = २० - प्रघाट२ज्याभा, प्रघाटग = २० - प्रघाट२ज्याका,  
प्रघाटघ = प्रघाट२ + प्रघाटकोज्यागा + १० - प्रघाटज्याभा -  
प्रघाटज्याका ।

$$\therefore \text{प्रघाटक} = २० - २(८^{\circ}७०'९०''४९०) = २० - १७^{\circ}४१'८०''९८०$$

$$= २^{\circ}५८'१९०''२० \therefore क = ३२४^{\circ}२८'६२$$

$$\text{प्रघाटग} = २० - २(८^{\circ}७४'४५''३६०) = २० - १७^{\circ}४८'९०''७२०$$

$$= २^{\circ}५१'०९२''८० \therefore ग = ३८१^{\circ}८५'८२$$

$$\text{प्रघाटघ} = ३०१०३०० + ९९९३७६७९ + १० - ८^{\circ}७०'९०''४९०$$

$$- ८^{\circ}७४'४५''३६०$$

$$= २०^{\circ}२९४'७९''७९ - १७^{\circ}४५'३९''८५० = २^{\circ}८४'२१''२९$$

$$\therefore घ = ६९३^{\circ}७६'५९$$

$$\therefore \text{प्रदि} = भ \sqrt{क + ग - घ}$$

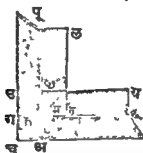
$$= १०० \sqrt{३२४^{\circ}२८'६२ + ३८१^{\circ}८५'८२ - ६९३^{\circ}७६'५९}$$

$$= १०० \sqrt{७०६^{\circ}१४'४४ - ६९३^{\circ}७६'५९}$$

$$= 100 \sqrt{12.3764} = 100 \times 3.5167 \\ = 351.67 \dots \dots 1$$

प्रभ्रान्ते उत्तरम् ३५४-३४९ इदमशुद्धम् ।

(१५) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र पूर्वा-परायता पूल-मितद्वादशहस्तोच्छ्रिता पूलतमू-भित्तिस्तथा द्वादशहस्तोच्छ्रितैव याम्योत्तरा छयदमू भित्तिरन्या पश्चिमदिशि संलग्नाऽस्ति इष्टसमये पूर्वकपाले द्वयोर्भित्तयोश्छाये समानभूमौ पतिते । ययोः पूर्वापरभित्तेश्छाया क-मितोत्तरस्यां दिशि पतिता तथा याम्योत्तरभित्तेश्छाया ग-मिता पश्चिमस्यां दिशि पतिता । अत्र रवेरुन्नतांशास्तत्र दिगंशाश्च के इति प्रश्नः । इह क-मिता भुजः, ग-मिता कोटिः, मूच-मितः कर्णः । वास्तविको भुजश्च क, ग-मिता कोटिस्ततो वास्तवि-की छाया मूच-मिता  $= \sqrt{k^2 + g^2}$  । अथ मूचभ-जात्यत्रिभुजे

$$\text{ज्या } \angle \text{चमूख} = \text{ज्यादि} = \frac{1 \times \text{चख}}{\text{मूच}} = \frac{1 \times \text{क}}{\sqrt{k^2 + g^2}}$$

$$\text{अत्र } \sqrt{k^2 + g^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} = 8.54$$

$$\therefore \text{ज्यादि} = \frac{1 \times \text{क}}{8.54} \therefore \text{प्रघातमापकरूपे}$$

$$\text{प्रघादज्यादि} = \text{प्रघातक} + 10 - \text{प्रघाद } ५$$

$$= ६०२०६०० + १० - ६९८९७०० = ९९०३०९००$$

$$\therefore \text{पूर्वकपाले उत्तरा दिगंशाः} = ज्या^{-1} \cdot \frac{क}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

$$= ज्या^{-1} \cdot ९९०३०९०० = ५३^{\circ} ७' ४८''$$

अथोन्नतांशार्थमुपायः । पूर्वोक्तक्षेत्रे मूच-मितैव छाया भुजो द्वादश कोटिरनयोर्वर्गान्तरपदं कर्णः, एवं दृग्ज्या भुज उन्नतांशज्या शङ्कुः कोटिस्त्रिज्या कर्णस्थानयोः क्षेत्रयोः साजात्यं प्रसिद्धमतः

$$\frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{\text{ज्याउन्न}}{\text{ज्यादृ}} = \text{स्पवन्न} ।$$

$$\therefore \text{स्पवन्न} = \frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{अ}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

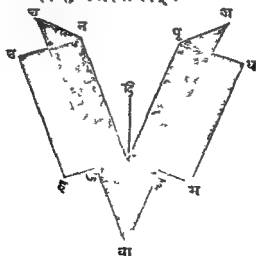
$$\therefore \text{प्रघाटस्पवन्न} = \text{प्रघाटअ} + १० - \text{प्रघाट५}$$

$$= १०७९१८१२ + १० - ६९८९७००$$

$$= १०३८०९११२ । \therefore \text{उन्नतांशाः} = स्प^{-1} \cdot \frac{अ}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

$$= स्प^{-1} \cdot १०३८०९११२ = ६७^{\circ} २३' ४८''$$

(१६) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्पयतामिह पूर्वापरा अ-हस्रोच्छ्राया धमू-भित्तिरस्ति तथा तदु-  
च्छ्रायैवान्योत्तरभागे पू-पूर्वाधिहात आ-कोणान्तरे गता मूत्र-भित्तिरस्ति  
ययोश्छाया धमू-भित्तेर्दक्षिणतस्तया मूत्र-भित्तेरुत्तरपश्चिमतश्च मिलिता  
पूजवाचनमू-रूपा भूमौ पतिता । तत्र मूधभित्तेश्छायाविस्तृतिः मूह-रेखा  
क-मिता तथाऽन्यभित्तेश्छायाविस्तृतिः मूअ-रेखा ग-मिता, एते छाये तथा  
पूमूदि-कोणो वा तत्तुल्य इवाअ-कोणश्चेति त्रयं ज्ञात्वा दिगंशा वनतांशाश्च  
कियन्त इति प्रभः ।

अत्र धाअमू-कोणस्तथा वाअमू-कोणश्च नवत्यंशमितोऽतः अवाअमू-  
चतुर्भुजं धृत्तान्तर्गतम् । तत्र अवाअ-कोणः आ-मितोऽतः १८०-आ=  
८ इमूअ ।

$$\therefore - \text{कोज्याआ} = \frac{क^2 + ग^2 - अइ^2}{२कग}$$

$$\therefore अइ = \sqrt{क^2 + ग^2 + २क.ग.कोज्याआ}$$

सकचतुर्भुजस्य धृत्तान्तर्गतत्वात् ८ इमूअ = ८ इवामू, किन्तु

इवामू = ८ पूमूदि = दिगंशाः ।

$$\therefore ८ इवामू = \text{दिगंशाः} ।$$

$$\therefore \text{क्यादि} = \frac{\text{ज्याआ} \times क}{\sqrt{क^2 + ग^2 + २क.ग.कोज्याआ}}$$

$$\text{अत्र हरस्वरूपम्} = \sqrt{३^2 + ४^2 + २ \times ३ \times ४ \times \text{कोज्याआ}} ।$$

$$\therefore ह^2 = २५ + २४ \times \text{कोज्याआ} ।$$

$$= २५ + २४ \times ३८२६८३४$$

$$= २५ + ९१८४४०१६ = ३४१८४४०१६ ।$$

$$\therefore \sqrt{३४१८४४०१६} = ५८४६७...३$$



$$\therefore \text{क्यादि} = \frac{\text{उयाभा.क}}{५८४६७...} = \frac{१२३८७९५ \times ३}{५८४६७...}$$

$$= \frac{२०७७१६३८५}{५८४६७...} = ४७४०५१७.....$$

$$\therefore \text{दिग्देशा उत्तराः} = २८^{\circ} । १७ ..... ।$$

अथोन्नतांशाः साध्यन्ते । वास्तविकी छाया वामू-मिता

$$= \frac{\text{क} \times १}{\text{क्यादि}} \text{ ( वामू-क्षेत्रे द्रष्टव्यम् )}$$

$$= \frac{\text{क} \times १ \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याभा}}}{\text{क्याभा.क}}$$

$$= \frac{१ \times \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याभा}}}{\text{उयाभा}}$$

$$\therefore \text{स्पतन्त} = \frac{\text{अ.उयाभा}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याभा}}}$$

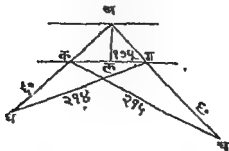
[ अत्र अ = १२ दस्ताः शङ्कुर्दस्तामकः कल्पितः ] ।

$$= \frac{१२ \times १२३८७९५}{५८४६७...} = \frac{११०८६५५४०}{५८४६७०००}$$

$$= \frac{११०८६५५४}{५८४६७००} = १८९६२०७१$$

$$\therefore \text{उन्नतांशाः पूर्वकपालीयाः} = ६३^{\circ} । ११ ..... ।$$

( १७ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



फलप्यते अवाक्तीरस्थः सरलप्रदेशः कग = १७५, कघ = ६०, गघ = २१४, गच = ९०, कच = २१५, एभ्यः अल-प्रमाणो नद्या विस्तारोऽपेक्ष्यः ।

$$(३८ प्रकगतः) कगच-त्रिभुजे कोज्या \angle कगच = \frac{कच^2 - कग^2 - गच^2}{२कग.गच}$$

$$= \frac{(२१५^2) - (१७५^2 + ९०^2)}{२ \times १७५ \times ९०} = \frac{७५००}{३१५००}$$

$$= .२३८०९५२.... \therefore \angle अगक = ७६^{\circ} १३' ३३''$$

$$एवम् कोज्या \angle गकघ = \frac{घग^2 - कघ^2 - कग^2}{२कघ.कग}$$

$$= \frac{(२१४^2) - (१७५^2 + ६०^2)}{२ \times १७५ \times ६०} = \frac{११५७१}{२१०००} = .५५१$$

$$\therefore \angle अकग = ५६^{\circ} ३३' ८'' \therefore \angle अगक + \angle अकग$$

$$= (७६^{\circ} १३' ३३'') + (५६^{\circ} ३३' ८'') = १३२^{\circ} ४६' ४१''$$

$$\therefore \angle कलग = ४७^{\circ} १३' १८''$$

$$\therefore अग = \frac{१७५ \times ज्या(५६^{\circ} ३३' ८'')}{ज्या(४७^{\circ} १३' १८'')}$$

$\therefore$  अगल-त्रिभुजऽनुपाततः

$$अल = \frac{१७५ \times ज्या(५६^{\circ} ३३' ८'') ज्या(७६^{\circ} १३' ३३'')}{१ \times ज्या(४७^{\circ} १३' १८'')}$$

$\therefore$  प्रघातमापकरूपम्—

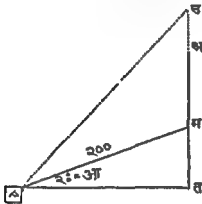
$$प्रघातअल = प्रघात१७५ + प्रघातज्या(५६^{\circ} ३३' ८'') + प्रघातज्या(७६^{\circ} १३' ३३'') - १० - प्रघातज्या(४७^{\circ} १३' १८'')$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} + २२४३०३८५ & - १० \\ + ९९८७३४१३ & - ९८६९६५३१ \\ + ९९२१३५७२ & - १९८६५६९३१ \\ + २२२१५१७३७० & \end{array} \right\}$$

$$= (+२२.१५१७३७० - १९.८६५६५३१) = २.२८६०८३९$$

∴ अल = १९३.२३३ हस्ताः, इदमेव पात्रप्रमाणम् । प्रभान्ते पात्र-  
प्रमाणम् = २००.८६२८ हस्ताः, इदमशुद्धम् ।

( १८ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यतेऽत्र क्रमनिष्ठाया मयत-भूमेरुपदेशे म-स्थाने स्थितस्य  
हस्तशतोच्चिद्रूप मम-वृक्षस्य मूलं म, अमम् = अ । वृक्षमूलप्रदेशात्  
प स्थाने हस्तशतद्वयान्तरे काचिद्वर्षा । अ-अप्रस्थानस्थयोर्वानरयोरेक-  
तरो वृक्षादयतांर्य प्रयणभूम्यामयत एव वर्षा गतः । अन्यतरश्च कि-  
ञ्चिदुर्ध्वं वर्णगत्या तां वर्षा गतः । द्वयोर्वानरयोर्गती यदि समाने  
कल्प्येते तदोर्ध्वानमानं विवदिति प्रश्नः । अम = अ, मप = क, अत्र = य  
प्रभानुसारतः अम + मप = पत्र + अत्र ∴ पत्र = मप + अम - अत्र ।  
प्रायण्यकोणः ∠मपत = २०° = आ ∴ ∠पमत्र = ९० - आ = ७०°  
∴ ∠पमत्र = १८०° - (९०° - आ) = ९०° + आ

$$\text{अम (३८) प्रक्रमः कोणया } \angle \text{पमत्र} = \text{उपाया} = \frac{\text{पत्र}^2 - \text{मप}^2 - \text{मत्र}^2}{२\text{मप.मत्र}}$$

∴ पत्र² = मप² + मत्र² + २उपाया.मप.मत्र । विष्णु

$$\text{पत्र} = \text{मप} + \text{अम} - \text{अत्र} \therefore \text{पत्र} = (\text{मप} + \text{अम} - \text{अत्र})$$

$$= \underline{मप} + \underline{अम} + \underline{अउ} + २पम.अम - २पम.अउ - २अम.अउ$$

$$= \underline{मप} + \underline{अउ} + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$= \underline{मप} + (\underline{अउ} + \underline{अम}) + २ज्याआ.मप(\underline{अउ} + \underline{अम})$$

$$= \underline{मप} + \underline{अउ} + \underline{अम} + २अउ.अम + २ज्याआ.मप(\underline{अउ} + \underline{अम})$$

$$\therefore २मप.अम - २मप.अउ - २अम.अउ$$

$$= २अउ.अम + २ज्याआ.मप(\underline{अउ} + \underline{अम})$$

$$= २अउ.अम + २ज्याआ.मप.अउ + २ज्याआ.मप.अम$$

$$\therefore २पम.अम - २ज्याआ.मप.अम$$

$$= २अउ.अम + २पम.अउ + २अम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$= ४अउ.अम + २पम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$२अम(\underline{मप} - ज्याआ.मप)$$

$$= \underline{अउ}(४अम + २मप + २ज्याआ.मप)$$

$$= २अम.मप(१ - ज्याआ)$$

$$= \underline{अउ} \{ ४अम + २मप(१ + ज्याआ) \}$$

$$\therefore \underline{अउ} = \frac{\underline{अम.मप}(१ - ज्याआ)}{२अम + मप(१ + ज्याआ)}$$

$$= \frac{\underline{अ.क}(१ - ज्याआ)}{२अ + क(१ + ज्याआ)}$$

अस्य गणितम् ।

$$\underline{उद्दिष्टमानम्} = \underline{अउ} = \frac{\underline{अ.क}(१ - ज्याआ)}{२अ + क(१ + ज्याआ)}$$

$$= \frac{१०० \times २०० (१ - ३४२०२०१)}{२ \times १०० + २०० (१ + ३४२०२०१)}$$

$$= \frac{२०००० (६५७९७९९)}{२०० + २०० + २०० (३४२०२०१)} = \frac{१३१५९५९८००}{४६८४०४०२}$$

$$= २८०९४५४५$$

## ( १९ ) मश्रस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते कम = सरलप्रदेशः = अ, मश = लंशः, मस्य मूल-  
विन्दुः = म, अत्रविन्दुः = अ, कम-प्रदेशस्य मध्यप्रदेशः = म-विन्दुः ।  
 $\angle मकअ = \angle मगअ = अ$  ।  $\angle मकम = का$ ,  $\angle कमअ = \angle मगअ$   
 $= \angle ममअ = ९०^\circ$ , सरलभूमितल्योपरि लंशस्य स्वरूपरत्नात् ।

मश = लंशः = मा ।

$\therefore \frac{मा \cdot कोउया'भा}{उया'भा} = कम$ , अत्रम-तिशुनस्य समद्विबाहुत्वत्वात्

सरलप्रदेशार्धविन्दुतो लंशमूलवर्धनं मशू-रेखा कम-रेख्योपरि स्वरूपत्वा

$$\therefore मम' = कम' - \left( \frac{कम}{२} \right)^2 = \frac{मा' \cdot कोउया'भा}{उया'भा} - \frac{कम'^2}{४}$$

$$= \frac{मा' \cdot कोउया'भा \times ४ - उया'भा \cdot कम'^2}{४ उया'भा} \quad | \text{अत्रम-तिशुने}$$

$$मम = \frac{मा \times कोउया'भा}{उया'भा} \quad \therefore मम' = \frac{मा' \times कोउया'का}{उया'का}$$

$$\therefore \frac{मा' \cdot कोउया'भा \times ४ - उया'भा \cdot कम'^2}{४ उया'भा} = \frac{मा' \times कोउया'का}{उया'का}$$

$$\therefore मा' \cdot ४ कोउया'भा \cdot उया'का - उया'भा \cdot उया'का \cdot कम'^2$$

$$= मा' \times ४ उया'भा \cdot कोउया'का$$

$$\therefore मा' \cdot ४ कोउया'भा \cdot उया'का - मा' \cdot ४ उया'भा \cdot कोउया'का$$

$$= ज्या^2 भा. ज्या^2 का. कग^2$$

$$= ज्या^2 ( कोज्या^2 भा. ज्या^2 का - ज्या^2 भा. कोज्या^2 का )$$

$$= ज्या^2 ( कोज्याभा. ज्याका + ज्याभा. कोज्याका ) \times$$

$$( कोज्याभा. ज्याका - ज्याभा. कोज्याका )$$

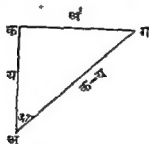
$$= ज्या [ ज्या ( भा + का ) ] [ ज्या ( भा - का ) ]$$

$$\therefore या = \frac{\frac{कग^2}{2} ज्याभा. ज्याका}{\sqrt{ज्या ( भा + का ) ज्या ( भा - का )}}$$

$$= \frac{\frac{अ}{2} ज्याभा. ज्याका}{2 \sqrt{ज्या ( भा + का ) ज्या ( भा - का )}}$$

$$\therefore चम = दूरत्वम् = \frac{अ. कोज्याका. ज्याभा. ज्याका}{2 \sqrt{ज्या ( भा + का ) ज्या ( भा - का )}}$$

( २० ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अ, क, ग त्रीणि स्थानानि कल्प्यन्ते । तत्र अ-स्थानात् क-स्थानं प्राच्यां वर्तते । अ-स्थानात् ग-स्थानं च भा-अंशान्तरे क-स्थानतो दक्षिणभागे अ-दक्षिणमितान्तरे तिष्ठति । ग-स्थानं प्राप्यमस्ति किन्तु क-स्थानाद् दक्षिणगमनमशक्यमतो ग-स्थानं लिप्सुर्जनः क-स्थानात् अ-स्थानं प्रत्यक् गत्वा भा-अंशान्तरेण चलितो ग-स्थानं लब्धः । अत्र

तस्य चलनप्रदेशः अक + अग = क । अक = य .  
 .  
 अग = क - य ।

$$(३८ प्रकृतः) कोज्याभा = \frac{य^2 + (क - य)^2 - अ^2}{२य(य - क)}$$

$$\therefore २य(क - य)कोज्याभा = य^2 + (क - य)^2 - अ^2$$

$$\therefore अ^2 = य^2 + (क - य)^2 - २य(क - य)कोज्याभा$$

$$= य^2 + क^2 + य^2 - २क.य - २क.य.कोज्याभा + २य^2.कोज्याभा$$

$$= क^2 + २य^2 + २य^2.कोज्याभा - (२क.य + २क.य.कोज्याभा)$$

$$= क^2 + २य^2(१ + कोज्याभा) - २कय(१ + कोज्याभा)$$

$$= क^2 + (२य^2 - २कय)(१ + कोज्याभा)$$

$$\therefore २य^2 - २कय = \frac{अ^2 - क^2}{१ + कोज्याभा}$$

$$\therefore ४य^2 - ४क.य + क^2 = \frac{२अ^2 - २क^2 + क^2 + क^2.कोज्याभा}{१ + कोज्याभा}$$

$$= \frac{२अ^2 - क^2 + क^2.कोज्याभा}{१ + कोज्याभा} = \frac{२अ^2 - क^2(१ - कोज्याभा)}{१ + कोज्याभा}$$

$$\text{अत्र } १ + कोज्याभा = २कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}$$

$$\therefore २य - क = \frac{\sqrt{२अ^2 - क^2} \frac{१}{२} \text{ उआ}}{कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

$$\therefore य = \frac{१}{२} क + \frac{\sqrt{अ^2 - क^2} \frac{१}{२} \text{ उआ}}{२कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

एतदेव क-स्थानात् अ-स्थानस्यान्तरम् ।

$$\therefore क - य = \frac{१}{२} क - \frac{\sqrt{अ^2 - क^2} \frac{१}{२} \text{ उआ}}{२कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

एतत् अ-स्थानात् ग-स्थानस्यान्तरम् ।

पुस्तकप्राप्तिस्थानम्—

हरिकृष्णदास, मालिक

गुप्तबुरूडीपो, कचौरी गली

वनारस सिटी ।



## विज्ञापनम् ।

अस्तु निवेदनं समर्थनं सर्वेषां सज्जनानां पुरतो यदिह कार्यालये वेद-वेदाङ्ग- (व्याकरण ज्योतिष-निरुक्त धर्मशास्त्र-वेदभाष्य-छन्दःशास्त्र) षट्दर्शनपुराणोपपुराणेतिहास-रामायण-काव्य नाटक चम्पू-भृति-सर्वविषयकाणि सुम्बयी पूना कलिकाता-काशीस्थ-यन्त्रालयेषु समुद्रितानि पुस्तकानि लभ्यन्ते ।

अत्रेदमवगच्छन्तु विद्वांसो यदस्मात् कार्यालयाद्यानि पुस्तकानि मेप्यन्ते तेषां प्रत्येकं पत्रं चावलोक्य देवात् कण्टकादिदोषतो यदि कुत्रापि पत्र वैकृत्यादि प्राप्यते तदा तत् ततो निरस्य तत्स्थानेऽन्यत् सुदृढ संनिवेश्य मनोहराकारे समुल्लिखितस्थानेषु समुचितमूल्येनैव सावधानतया पुस्तकानि “भी. पी.” द्वारा मेप्यन्ते यथाऽस्मद्ग्राहकाणां कथमपि हानिर्न भवेत् । सकृद्व्यवहारत एव वणिजः सत्यताऽभिलक्ष्यतेऽलमधिकप्रशंसया किन्त्वयं प्रार्थना यत् पुस्तकलिप्सुना स्वनाम-ग्राम-‘पो.आ.-जिला’ एतत् सुस्पष्ट स्वपत्रे लेखनीयम् ।

पुस्तकप्राप्तिस्थानम्

{

श्रीहरिकृष्णदास,  
मालिक, “गुप्तबुर्खापो”  
कचोरीगली, बनारस सिटी ।